ARTHUR ERICH HAAS

GRUNDGLEICHUNGEN DER MECHANIK

Von dem gleichen Verfasser

Der Geist des Hellenentums in der modernen Physik

Antrittsvorlesung, gehalten am 17. Januar 1914 in der Aula der Universität Leipzig

Groß-Oktav. 32 Seiten. Geheftet M. 1.20

Was der Verfasser in dieser Vorlesung zu geben verspricht, den Nachweis hellenischen Geistes in der modernen Physik, gibt er — auf 32 Seiten — mit einer Klarheit der Darstellung, die fesselt und erfreut, mit einer Beherrschung des Stoffs, die wohltut, mit einer persönlichen Bewunderung für den Gegenstand, die, ehrfurchtweckend, die schönste Wirkung einer Betrachtung ausübt.
Eine Darstellung, die zugleich zeigt, daß in der Physik die stärksten, fruchtbarsten Leitgedanken der exakten Forschung philosophischen Ursprungs sind, wird einer Zeit willkommen sein, die, wie die heutige, zu philosophischer Betrachtung neigt.

Die Entwicklungsgeschichte des Satzes von der Erhaltung der Kraft

Geheftet M. 2.60

Geschichte der Chemie

von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart,
zugleich

Einführung in das Studium der Chemie

von

Dr. Ernst von Meyer

o. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule in Dresden

Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage.

gr. 8. 1914. Geb. in Ganzleinen 12 M., geh. 11 M.

Wilhelm Ostwald:

„Eine stets wiederkehrende Erfahrung als Forscher wie als Lehrer hat mich überzeugt, daß es kein wirksameres Mittel zur Belebung und Vertiefung des Studiums gibt, als das Eindringen in das geschichtliche Werden der Probleme."

„Wie in den vorhergehenden Auflagen dieses Werkes, so sind in der vorliegenden besondere zahlreiche Änderungen und umfangreiche Ergänzungen vorgenommen worden. Welche Erweiterung und Vertiefung hat auch die chemische Wissenschaft seit Erscheinen der dritten Auflage erfahren! Gebiete, die früher wenig bearbeitet waren, wie das der radioaktiven Stoffe, die Kolloidchemie und andere sind mehr und mehr erschlossen worden. — Auch die geschichtliche Durchdringung der in ältere Zeiten zurückreichenden Beobachtungen und chemischen Untersuchungen hat erfreuliche Fortschritte gemacht. Manche Anzeichen bieten Gewähr dafür, daß der historische Sinn für die Entwicklung der Chemie, für das Werden unserer Vorstellungen in erfreulicher Weise zugenommen hat."

„Eine Geschichte der Chemie, die in 16 Jahren drei Auflagen erlebt, bedarf keiner besonderen Empfehlung mehr. Es zeugt das allein für den inneren Wert des vorliegenden Werkes, welches noch viele neue Freunde sich erwerben wird. Das erfreulicherweise sich immer mehr bemerkbar machende Wiedererwachen des historischen Sinnes wird nicht ohne gute Folgen bleiben." *Stahl und Eisen.*

Ausführliche Prospekte kostenlos zu beziehen vom

VERLAG VON VEIT & COMP. IN LEIPZIG
MARIENSTRASSE 18

Die Grundgleichungen der Mechanik,

dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung

Vorlesungen zur Einführung in die theoretische Physik, gehalten im Sommersemester 1914 an der Universität Leipzig

von

Arthur Erich Haas
Dr. phil., a. o. Professor für Geschichte der Physik

Mit 45 Abbildungen im Text

Leipzig
Verlag von Veit & Comp.
1914

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Die Vorlesungen, die den Inhalt dieses Buches bilden, waren nicht als historische Vorträge im üblichen Sinne dieses Wortes gedacht. Es lag mir durchaus fern, hier etwa Prioritätsprobleme zu erörtern oder recht viele Namen und Jahreszahlen anzuführen. Die Anwendung der geschichtlichen Methode entsprang vielmehr der Überzeugung, daß keine andere Methode so wie diese geeignet sein kann, das Verständnis physikalischer Prinzipe zu erleichtern und die Erkenntnis ihrer Bedeutung zu klären und zu vertiefen; auch glaube ich, daß der Anfänger die Prinzipe der theoretischen Physik am leichtesten erfaßt, wenn er auch die Gedankengänge erfährt, die seinerzeit zu ihrer Auffindung führten und wenn er ferner die fundamentalen Überlegungen der theoretischen Physik in der Form kennen lernt, in der sie von ihren eigentlichen Urhebern zuerst in klarer Weise ausgesprochen wurden.

Diese ursprüngliche Form ist leider im Laufe der Zeit vielfach verwischt worden, mitunter auch ganz verloren gegangen, hauptsächlich wohl deshalb, weil viele Bearbeiter von Lehrbüchern — oft wohl um des Strebens nach Originalität willen — für die mechanischen Theoreme neue, nicht immer aber auch klarere Ableitungen versuchten, die dann aus ihren wiederum in andere Lehrbücher übergingen. Demgegenüber habe ich stets (weniger freilich nach Wortlaut und Schreibweise als nach dem eigentlichen Wesen) die grundlegenden Ableitungen der Mechanik wieder in ihrer ursprünglichen „klassischen" Form herzustellen versucht, die mir in vielen Fällen den Vorzug größerer Klarheit und Übersichtlichkeit zu besitzen scheint; doch habe ich tatsächliche Vereinfachungen, die die klassischen Deduktionen in späterer Zeit erfahren haben (sofern nicht damit eine Erschwerung des Verständnisses verbunden war), überall berücksichtigt.

Die Einzelheiten aus der Geschichte der mechanischen Prinzipe wurden nur soweit in das vorliegende Buch aufgenommen, als dadurch das Verständnis dieser Prinzipe erleichtert wird; dort, wo sich für diesen Zweck die geschichtliche Methode nicht eignet, wo sie sich hierfür als überflüssig oder gar als schädlich erweist, habe ich sie getrost beiseite gelassen. Mir kam es weit weniger darauf an, in diesem Buche ein vollständiges historisches Material zusammenzustellen, als vielmehr zu zeigen, welchen Problemstellungen die grundlegenden mechanischen Prinzipe ihre Entstehung verdanken, aus welchen Anfängen sie hervorgingen, wie sie sich weiter gestalteten und vervollkommneten, wie sich ihr Anwendungs-

gebiet erweiterte, wie sie untereinander zusammenhingen und welche Bedeutung sie für die „Ökonomie" der physikalischen Wissenschaft erlangten.

Bei der Fertigstellung dieses Buches leitete mich der Wunsch, um der leichteren Verständlichkeit willen die Form des mündlichen Vortrages nach Möglichkeit beizubehalten; dieses Bestreben möge als Rechtfertigung dienen, wenn die Darstellung an manchen Stellen vielleicht zu breit geraten ist oder wenn der Leser schon einmal Gesagtes nochmals (namentlich im Beginne der einzelnen Vorlesungen) knapp wiederholt findet.

Um der leichteren Verständlichkeit willen mußte ich leider auch darauf verzichten, auf die so geistvollen Forschungen der neueren Zeit einzugehen, die sich insbesondere an die Namen von Heinrich Hertz, Otto Hölder und Ludwig Boltzmann knüpfen. Wenn auch diese Forschungen die wesentlichsten Grundlagen der theoretischen Mechanik betreffen und ohne ihre Kenntnis heute ein tieferes Eindringen in die Prinzipe der Mechanik kaum mehr möglich ist, so glaubte ich sie doch in diesem Buche, das ja nur der Einführung in die Mechanik dienen soll, besser übergehen zu sollen. Ich fürchtete, bei Anfängern (für die dieses Buch vor allem leicht lesbar sein soll) nur Verwirrung anzurichten, wenn ich etwa bei der Besprechung der Lagrangeschen Forschungsergebnisse von Schwierigkeiten spreche, die Lagrange selbst gar nicht zum Bewußtsein gekommen waren.

Eine genaue Anführung der gesamten, die Geschichte der Mechanik betreffenden Literatur habe ich unterlassen, zumal sich Hinweise auf besonders wichtige Abhandlungen ohnedies an vielen Stellen finden. Nur drei Werke, denen ich besonders wertvolle Anregungen verdanke und von denen ich mich besonders beeinflußt weiß, möchte ich ausdrücklich hervorheben: Ernst Machs historisch-kritische Darstellung der Mechanik („Die Mechanik in ihrer Entwicklung", 7. Aufl., Leipzig 1912); Pierre Duhems Werk „L'évolution de la mécanique" (Deutsch von Philipp Frank unter dem Titel „Die Wandlungen der Mechanik", Leipzig 1911) und das ausgezeichnete Buch von Ferdinand Rosenberger „Isaac Newton und seine physikalischen Prinzipien" (Leipzig 1895).

... Die Herren Dr. Philipp Frank, Professor der theoretischen Physik an der deutschen Universität in Prag, Karl Jörissen, cand. math. in Leipzig, Alexander Kozlik, cand. phil. in Wien, sowie Frl. Gerda Laski, stud. phil. in Wien, hatten die Freundlichkeit, die Korrekturbogen dieses Buches einer sehr gründlichen und aufmerksamen Durchsicht zu unterziehen. Für ihre Mühe sowie für viele wertvolle Verbesserungsvorschläge sei ihnen auch an dieser Stelle auf das herzlichste gedankt. Aufrichtiger Dank gebührt auch dem Verlage Veit & Co. für sein bereitwilliges Entgegenkommen in allen Fragen, die mit der Fertigstellung dieses Buches zusammenhingen.

Leipzig, im Juli 1914.

Arthur E. Haas.

Inhalt.

Seite

Erste Vorlesung. Das Prinzip der statischen Momente 1

Zweite Vorlesung. Das Prinzip des Kräfteparallelogrammes 12

Dritte Vorlesung. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten 24

Vierte Vorlesung. Die Gleichgewichtsgleichungen von Lagrange 35

Fünfte Vorlesung. Die Begründung der Dynamik durch Galilei 45

Sechste Vorlesung. Die Bewegungsaxiome 56

Siebente Vorlesung. Die natürlichen Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes 63

Achte Vorlesung. Die Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes in rechtwinkligen und in Polarkoordinaten 74

Neunte Vorlesung. Die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegungen . . 84

Zehnte Vorlesung. Das Gravitationsprinzip 91

Elfte Vorlesung. Das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunktes 102

Zwölfte Vorlesung. Das Prinzip der Erhaltung der Flächenmomente . . . 113

Dreizehnte Vorlesung. Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft . 126

Vierzehnte Vorlesung. Die Entstehung des Potentialbegriffes 137

Fünfzehnte Vorlesung. Das Problem der unfreien Bewegung 149

Sechzehnte Vorlesung. Das Prinzip von d'Alembert 158

Siebzehnte Vorlesung. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der ersten Form und die Methode der Multiplikatoren 168

Achtzehnte Vorlesung. Die generalisierten Bewegungsgleichungen von Lagrange 178

Neunzehnte Vorlesung. Das Prinzip der kleinsten Aktion 189

Zwanzigste Vorlesung. Das Hamiltonsche Prinzip und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen 200

Namenverzeichnis 211

Sachverzeichnis 215

Erste Vorlesung.

Das Prinzip der statischen Momente.

Der Zweig der Mechanik, der sich am frühesten zu entwickeln begann und der zuerst in exakter Form eine bleibende Gestalt empfing, ist die Statik. Die Statik ist die Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte. Unter Kraft versteht man aber nach der berühmten Definition, die Lagrange an die Spitze seiner „Analytischen Mechanik" stellte, die irgendwie geartete Ursache, welche den Körper, an dem man sich sie wirkend denkt, in Bewegung setzt oder in Bewegung zu setzen strebt;[1] und die Statik ist somit nach Lagrange die Lehre von den Gesetzen, gemäß denen Kräfte ihre Wirkungen gegenseitig vernichten.[2]

Es muß nun auf den ersten Blick befremdlich erscheinen, wieso ein Wissenszweig, der sich ein solches Ziel setzt, der also überhaupt nur Fälle betrachtet, in denen eine Bewegung unmöglich ist, wieso ein solcher Wissenszweig aus praktischen Bedürfnissen entstanden sein kann; denn die Maschinen, deren Untersuchung sich die Statik zur Aufgabe macht, wie der Hebel, die Rolle, der Flaschenzug, das Wellrad, sind doch offenbar nicht zu dem Zwecke erfunden worden, um an ihnen zum Zeitvertreib Balancierübungen vorzunehmen, sondern vor allem zu dem Zwecke, um mit ihrer Hilfe Lasten leichter bewegen zu können, als dies ohne Anwendung der Maschinen möglich wäre.

Trotzdem waren es aber gerade praktische Bedürfnisse, die zu der Entstehung des Gleichgewichtsproblems Anlaß gaben. Denn es ist eine Frage von eminent praktischem Interesse, bis zu welcher Größe man beispielsweise bei einem Hebel die Kraft steigern müsse, um eine Last überhaupt emporheben zu können, falls die bis dahin aufgewendete Kraft hierzu nicht ausreicht; oder bis zu welchem Betrage man, falls die zu hebende Last zu groß ist, diese verringern müsse, um mit der zu Gebote stehenden Kraft überhaupt eine Bewegung zu erzielen. Beide Fragen

---

[1] Lagrange, Mécanique analytique (Anfang): La statique est la science de l'équilibre des forces. On entend en général par force ou puissance la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée.

[2] Ib.: L'équilibre résulte de la destruction de plusieurs forces qui se combattent et qui anéantissent réciproquement l'action qu'elles exercent les unes sur les autres; et le but de la Statique est de donner les lois suivant lesquelles cette destruction s'opère.

führen aber notwendig zu dem Problem des Gleichgewichtes an der betreffenden Maschine. Denn beide Fragen sind gelöst, wenn das Verhältnis ermittelt ist, in dem bei der Maschine unter den gegebenen Bedingungen Kraft und Last zueinander stehen müssen, um ihre Wirkungen gegenseitig zu vernichten. Je weniger von diesem Verhältnisse das tatsächlich zwischen Kraft und Last bestehende Verhältnis abweicht, desto ökonomischer ist die Verwendung der Maschine.

So alt wie die Benutzung der einfachen Maschinen dürften darum wohl auch die einfachsten Kenntnisse auf statischem Gebiete sein; und eine der am frühesten erkannten Tatsachen war wohl jedenfalls die, daß an einem gleicharmigen Hebel, wie ihn die gewöhnliche Wage darstellt, Gleichgewicht nur bei Gleichheit der beiden Gewichte bestehen kann.

An dem ungleicharmigen Hebel dürfte man sich andererseits wieder wohl sehr bald davon überzeugt haben, daß der Aufwand an Kraft, der notwendig ist, um eine Last zu bewegen, um so geringer ist, je näher zu dem Unterstützungspunkte die Last liegt und je weiter von ihm die Kraft angreift. Diese zunächst nur qualitative Erkenntnis mag dann Anlaß zu genaueren Untersuchungen an ungleicharmigen Wagen gegeben haben (die übrigens schon im Altertum als Schnellwagen auch praktische Verwendung fanden). So mag vielleicht zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten das Gesetz des Gleichgewichtes für den ungleicharmigen Hebel gewonnen worden sein, das jedenfalls schon zu des Aristoteles Zeiten bekannt war, das jedoch seine exakte Begründung erst durch den Forscher erhielt, dessen Wirken wohl den Höhepunkt der antiken Mathematik und der antiken Physik darstellt.

Dieser geniale Forscher war Archimedes, der im dritten vorchristlichen Jahrhundert in Syrakus lebte und der den Grund zu der wissenschaftlichen Statik in seiner Schrift legte: „Von dem Gleichgewichte ebener Figuren oder von ihren Schwerpunkten“ (*περὶ ἐπιπέδων ἰσορροπικῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων*).[1]

Wie schon der Titel sagt, spielt in diesem Werke der Begriff des Schwerpunktes eine große Rolle. Eine Definition dieses Begriffes gibt nun Archimedes in seinen erhaltenen Schriften allerdings nicht; er geht aber offenbar von der Definition aus, daß der Schwerpunkt zweier gleicher Körper, deren räumliche Ausdehnung verschwindend klein ist, daß also der Schwerpunkt zweier materieller Punkte, wie wir heute sagen würden, mit dem Halbierungspunkte der Verbindungslinie der beiden materiellen Punkte zusammenfällt. Auf Grund dieser Definition kann dann Archimedes durch geeignete Methoden, wie sie im Wesen auch heute noch üblich sind, die Schwerpunkte beliebiger geradliniger ebener

[1] Griechisch-lateinische Ausgabe, besorgt von Heiberg in der Bibliotheca Teubneriana (Leipzig 1911); deutsche Übersetzungen von E. Nizze (Stralsund 1824) und von Kliem (nach der englischen Bearbeitung von Heath; Berlin 1914).

Figuren, — durch Zuhilfenahme infinitesimaler Operationen aber auch die Schwerpunkte krummliniger Figuren und gekrümmter räumlicher Gebilde ermitteln. Diese Untersuchungen führten dann Archimedes offenbar zu der Erkenntnis, daß man die Masse jedes beliebig geformten Körpers sich in seinem Schwerpunkte vereinigt denken könne, ohne daß deshalb etwas an der Betrachtung der statischen Wirkungen des Körpers zu ändern wäre.

Aus dieser Erkenntnis folgt nun ohne weiteres ein Satz, den Archimedes unter die Voraussetzungen seines Werkes aufgenommen hat und der eigentlich nur eine Verallgemeinerung der Definition des Schwerpunktes darstellt. Nach diesem Satze befindet sich der gemeinsame Schwerpunkt zweier gleich schwerer Größen stets in der Mitte der Linie, die die Schwerpunkte der beiden Körper verbindet. Hieraus folgt wieder sofort, daß der gemeinschaftliche Schwerpunkt beliebig vieler gleicher Massen, die sich in gleichen Abständen auf einer Geraden befinden, in der Mitte der Linie liegt, die ihre sämtlichen Schwerpunkte verbindet.

Mittels dieser Sätze leitet nun Archimedes in sehr geistvoller Art das Hebelgesetz ab, indem er von der stillschweigenden Voraussetzung ausgeht, daß sich ein Hebel im Gleichgewichte befindet, wenn der gemeinsame Schwerpunkt der an ihm angebrachten Massen mit dem Unterstützungspunkte des Hebels zusammenfällt. Von dem Eigengewicht des Hebelbalkens wird dabei abstrahiert, indem man sich dieses entweder sehr klein denkt oder aber annimmt, daß der Schwerpunkt des Balkens mit seinem Unterstützungspunkte zusammenfällt.

Archimedes betrachtet nun zwei Massen — wir wollen sie m_1 und m_2 nennen —, die kommensurabel[1] seien, das heißt, ein gemeinschaftliches Maß besitzen. Wir wollen die Hälfte der kleinen Masse, die dieses gemeinschaftliche Maß von m_1 und m_2 darstellt, mit μ bezeichnen. Es sei also etwa $m_1 = 5$ kg und $m_2 = 3$ kg; dann ist das gemeinschaftliche Maß von m_1 und m_2 1 kg, und μ ist gleich $^1/_2$ kg.

Weiter betrachtet Archimedes eine starre Stange von der Länge AB (deren eigenes Gewicht nicht in Betracht kommt) und denkt sich diese im Punkte C derart geteilt, daß sich verhält

$$AC : CB = m_2 : m_1 \tag{1}$$

(Fig. 1); die Strecken AC und CB sind dann natürlich auch kommensurabel. Die Behauptung, die Archimedes aufstellt und beweist, lautet nun folgendermaßen: Befindet sich der Schwerpunkt der ersten Masse

[1] Daß Archimedes solchen Nachdruck auf die Kommensurabilität der Größen legt, erklärt sich daraus, daß den Griechen, trotzdem sie seit den Forschungen der Pythagoreer den Begriff des Irrationalen kannten, dennoch die Idee einer irrationalen Zahl völlig unfaßbar blieb. Sie waren zwar der Ansicht, daß jeder Zahl eine bestimmte Strecke entspreche; doch waren sie keineswegs davon überzeugt, daß auch umgekehrt zu jeder Strecke eine bestimmte Zahl gehöre.

im Punkte A und der der zweiten Masse im Punkte B, so befindet sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden Massen m_1 und m_2 im Punkte C.[1] Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir mit Archimedes

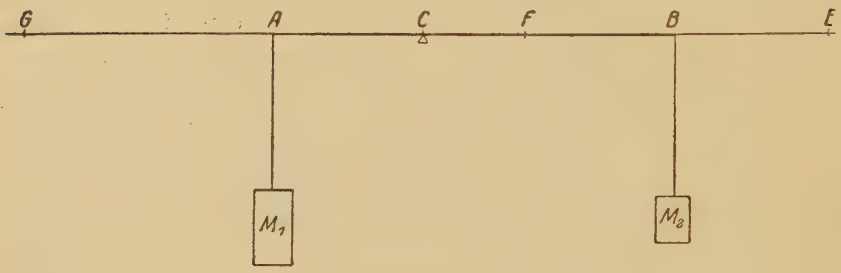

Fig. 1.

an der Strecke AB folgende Konstruktionen vor: wir verlängern die Strecke AB nach beiden Seiten, nehmen den kürzeren Hebelarm AC in den Zirkel und tragen ihn von dem Ende des längeren Hebelarmes,

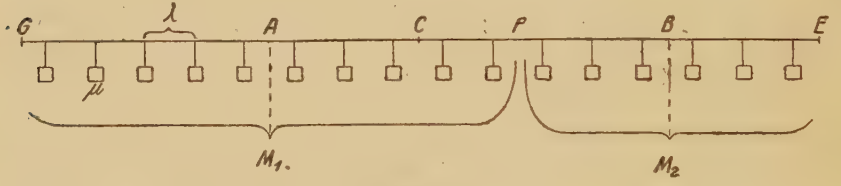

Fig. 2.

von dem Punkte B aus nach beiden Seiten auf; wir erhalten derart die beiden Punkte E und F (Fig. 2).

Aus der Gleichheit der beiden Strecken

$$BF = AC$$

folgt nun, indem man zu dieser Gleichung noch die Identität

$$CF = CF$$

hinzu addiert,

$$CB = AF.$$

Die Strecke CB, also den längeren Hebelarm, wollen wir nun ebenfalls in den Zirkel nehmen und sie von A aus nach der anderen Seite auftragen, so daß wir schließlich noch den Punkt G erhalten.

Es wird also jetzt eine Strecke, die doppelt so groß ist wie der längere Hebelarm, durch den Punkt A und eine Strecke, die doppelt so groß ist wie der kürzere Hebelarm, durch den Punkt B halbiert. Es sei

[1] Archimedes, Vom Gleichgewichte der Ebenen, Satz 6.

nun die kleine Masse μ (die Hälfte des gemeinschaftlichen Maßes von m_1 und m_2) in m_1 $n_1$mal und in m_2 $n_2$mal enthalten. Dann existiert auch eine Strecke λ, die in GF (das ja doppelt so groß ist wie der längere Hebelarm) $n_1$mal und in FE (das doppelt so groß ist wie der kürzere Arm) $n_2$mal enthalten ist. (In unserem besonderen Falle ist also $n_1 = 10$ und $n_2 = 6$.)

Wir teilen somit die Strecke GF in n_1 Teile von der Länge λ und belasten jede einzelne dieser Teilstrecken mit einem kleinen Gewichte μ; in gleicher Weise teilen wir die Strecke FE in n_2 Teile von der Länge λ und bringen auch hier wieder in der Mitte jeder Teilstrecke ein Gewicht an.

Nun haben wir ja schon früher gesehen, daß der Schwerpunkt einer beliebigen Anzahl äquidistanter gleicher Massen stets in der Mitte derjenigen Geraden liegt, die die sämtlichen Schwerpunkte verbindet. Es liegt also der Schwerpunkt der n_1 linken Gewichte, deren Summe gleich m_1 ist, in A und der Schwerpunkt der n_2 rechten Gewichte, deren Summe gleich m_2 ist, in B. Es ist somit klar, daß wir für die Untersuchung des Gleichgewichtes uns den tatsächlichen Hebel, wie ihn Fig. 1 wiedergibt, ersetzt denken können durch den fingierten, den Fig. 2 darstellt.

An dem fingierten Hebel haben wir es aber nun mit lauter gleichen Massen zu tun, die in gleichen Zwischenweiten auf einer geraden Linie ihre Schwerpunkte haben. Der gemeinsame Schwerpunkt aller $(n_1 + n_2)$ Massen liegt also in dem Mittelpunkte der Strecke GE. Man sieht nun leicht ein, daß der Mittelpunkt dieser Strecke der Punkt C ist. Denn da ja infolge unserer Konstruktion

$$GA = CB$$

und

$$AC = BE$$

ist, so ist auch, wie sich durch Addition der letzten zwei Gleichungen ergibt

$$GC = CE,$$

Ist also der Punkt C unterstützt, so findet bei dem fingierten Hebel Gleichgewicht statt und da sich der fingierte Hebel aber nun nach dem früher Gesagten ebenso verhält, wie wenn im Punkte A die schwere Masse m_1 und im Punkte B die schwere Masse m_2 konzentriert wäre, so muß sich also auch der tatsächliche Hebel, bei dem sich die Arme umgekehrt wie die Gewichte verhalten, im Gleichgewichte befinden; womit das Hebelgesetz bewiesen erscheint.[1]

[1] Zur Kritik des archimedischen Beweises vgl. man insbesondere Ernst Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, Kap. I, 1, § 5 und Anhang, Zusatz 1; ferner G. Vailati, La dimostrazione del principio della leva data da Archimede; Bolletino di bibliografia e storia delle scienza matematiche, 1904.

Nach derselben Methode beweist dann Archimedes unter Zuhilfenahme seines bekannten Exhaustionsverfahrens (mittels dessen er zuerst auch die Zahl π angenähert berechnete), daß unter den getroffenen Voraussetzungen am Hebel auch dann Gleichgewicht stattfindet, wenn die Massen m_1 und m_2 nicht kommensurabel sind.

Der Gleichgewichtsfall, den am Hebel Archimedes untersucht hatte, ist nun allerdings ein besonders einfacher; doch finden wir das Hebelgesetz bereits ganz richtig auch auf einen viel allgemeineren Fall in einem anderen antiken Werke angewendet, nämlich in der Mechanik des Heron von Alexandria, dessen Lebenszeit sich leider nicht mit Sicherheit feststellen läßt, jedenfalls aber zwischen die Jahre 200 v. Chr. und 100 n. Chr. fällt.[1] In diesem ungemein interessanten Werke, das wir leider nur in einer arabischen Übersetzung besitzen, und das für das Abendland von dem Ende des Altertums bis in das 19. Jahrhundert völlig verschollen blieb[2], finden wir nun die folgende bedeutungsvolle Erkenntnis.

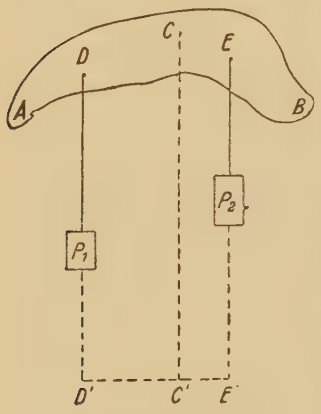

Fig. 3.

Es sei (Fig. 3) AB ein ganz beliebig gekrümmter Balken, der, wenn er im Punkte C aufgehängt ist, sich im Gleichgewichte befindet; d. h. C ist der Schwerpunkt des Balkens und wir können daher, wenn der Punkt C fixiert ist, von dem Eigengewichte des Balkens abstrahieren. In den Punkten D und E werden nun die Gewichte P_1 und P_2 aufgehängt, und da behauptet nun Heron, daß man auch in diesem Falle das archimedische Hebelprinzip anwenden könne, wenn man unter den Hebelarmen die Entfernungen der Punkte D und E von einer durch den Punkt C gezogenen Vertikalen verstehe. Man wähle, so meint Heron, auf dieser Vertikalen einen Punkt C' und errichte nun in diesem eine Senkrechte zu CC'. Diese horizontale Linie schneide die Verlängerung der Fäden, an denen die Gewichte P_1 und P_2 aufgehängt sind, in den Punkten D' und E'; und nach Heron[3] besteht also dann Gleichgewicht, wenn die Proportion erfüllt ist:

$$P_1 : P_2 = E'C' : D'C'. \tag{2}$$

[1] Nach Hultsch (Metrologicorum scriptorum reliquiae, Leipzig 1864) lebte Heron gegen Ende des 2. Jahrhunderts v. Chr., nach Wilhelm Schmidt dagegen (Einleitung zur Ausgabe der Werke Herons) frühestens im 1. Jahrhundert n. Chr.

[2] Die erste Ausgabe der Heronischen Mechanik besorgte Carra de Vaux im Journal asiatique (1893, als Sonderabdruck 1894 erschienen). 1900 erschien eine neue Ausgabe mit deutscher Übersetzung von L. Nix und W. Schmidt in der Bibliotheca Teubneriana.

[3] Herons Mechanik I, 33 (herausgegeben von Nix und Schmidt) S. 88ff.

In dem besonderen Falle, den Heron betrachtet und in dem die beiden Kräfte parallel sind, ist es nun allerdings gleichgültig, ob man die Perpendikel von den Angriffspunkten zu einer durch den fixen Punkt gehenden und den beiden Kraftrichtungen parallelen Geraden zieht oder die Lote von dem festen Punkte aus auf die beiden Kraftrichtungen fällt. Daß aber auch im allgemeinen Falle, in dem die beiden Kräfte nicht die gleiche Richtung haben, das zweite Verfahren richtig ist, das hat, wie es scheint, mit klarem Blicke zuerst der unvergleichlich geniale Denker erkannt, der die Reihe der großen Naturforscher der Renaissance eröffnete, Lionardo da Vinci, der unsterbliche Künstler, der großartig kühne Techniker, der an neuen Ideen überreiche Physiker.

Lionardo, der infolge einer unglückseligen Verkettung von Zufälligkeiten[1] nur einen recht geringen Einfluß auf die Entwicklung der Physik erlangte, obwohl er, wenn seine Schriften nur etwas bekannter geworden wären, die Entwicklung der Physik um wenigstens ein Jahrhundert hätte beschleunigen können — Lionardo hat in die Gesetze der Statik eine außerordentliche Klarheit gebracht und zugleich deren Anwendungsgebiet wesentlich erweitert, indem er seinen Untersuchungen den Begriff des potentiellen Hebelarmes zugrunde legte, unter dem er eben stets das von einem festen Punkte auf die Kraftrichtung gefällte Lot versteht.

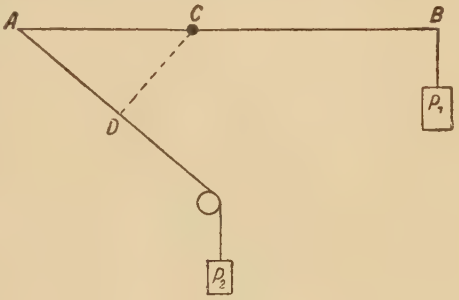

Fig. 4.

Lionardo betrachtet z. B., um nur eines aus vielen Beispielen hervorzuheben, einen im Punkt C befestigten Hebel AB (Fig. 4). Im Punkte B greife ein Gewicht P_1 an; von dem Punkte A führe ein Seil zu einer Rolle und an dem anderen Ende des Seiles ziehe das Gewicht P_2. Dann braucht man, wie Lionardo richtig erkennt, nur von dem Punkte C ein Lot CD auf die Richtung des Seiles zu fällen, um die Gleichgewichtsbedingung in der Form der Proportion aussprechen zu können

$$P_1 : P_2 = CD : CB.^2 \tag{3}$$

Mit dem Begriffe des potentiellen Hebelarmes zeigt nun ein anderer Begriff eine enge Verwandtschaft, den ein noch viel zu wenig gewürdigter genialer Physiker des 13. Jahrhunderts bereits in die Statik eingeführt hatte, nämlich Jordanus Nemorarius. Dieser Forscher, über dessen

[1] Vgl. darüber etwa E. Gerland, Geschichte der Physik (München u. Leipzig 1913), S. 242ff.

[2] Les manuscrits de Léonard de Vinci, publiés par Ch. Ravaisson-Mollien (Paris 1890), Bd. 3, Manuskript E, Fol. 65.

Persönlichkeit wir leider nichts mit Sicherheit wissen (die einen halten ihn für einen Italiener, die anderen für einen Sachsen)[1], erkannte deutlich, daß bei einer schrägen Stellung eines geradlinigen Hebels die Schwerkraft jedenfalls weniger wirksam sein könne, als bei der horizontalen Stellung. Jordanus unterscheidet deshalb von der absoluten Schwere, von der gravitas schlechthin die relative Schwere, die Schwere in bezug auf die augenblickliche Lage, in bezug auf die augenblickliche Stellung des Hebels; diese relative Schwere heißt darum bei Jordanus die gravitas secundum situm.

Um ihr Verhältnis zu der absoluten Schwere zu ermitteln, betrachtet Jordanus einen gleicharmigen Hebel, dessen verschiedene Stellungen

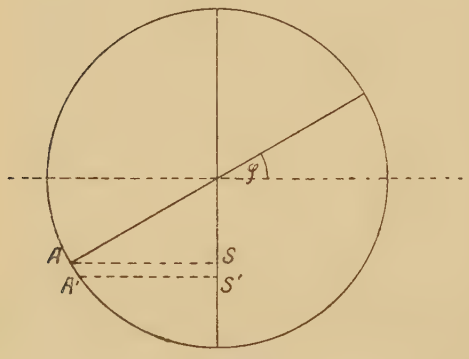

Fig. 5.

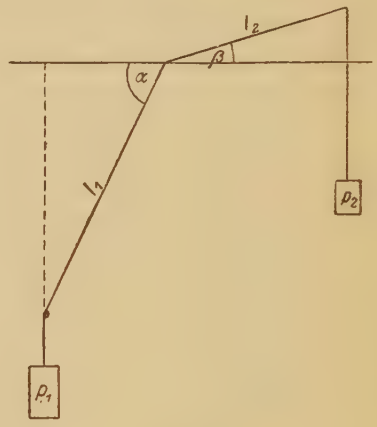

Fig. 6.

dann durch die verschiedenen Durchmesser eines Kreises gegeben sind (Fig. 5); und durch eine Betrachtung, die sich auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten gründet und auf die wir im Zusammenhange mit diesem Prinzip demnächst noch ausführlicher zu sprechen kommen werden, erkennt nun Jordanus auch ganz richtig, daß die gravitas secundum situm sich zu der absoluten Schwere stets ebenso verhält, wie sich zu einem sehr und zwar beliebig kleinen Kreisbogen (AA') an der betreffenden Stelle seine vertikale Projektion (SS') verhält.[2] Bei einer horizontalen Stellung des Hebels ist also die gravitas secundum situm gleich dem tatsächlichen Gewichte, bei einer vertikalen Stellung des Hebels verschwindet sie völlig.

Bildet also der Hebel mit der Horizontalen den Winkel φ, so kommt, wie Jordanus bereits weiß (wenn er sich auch in einer anderen Terminologie ausdrückt), für die statischen Verhältnisse nicht die ganze tatsächlich an dem Hebelarme angreifende Kraft P in Betracht, sondern

[1] Vgl. darüber etwa E. Gerland, Geschichte der Physik, S. 184ff.
[2] Vgl. Duhem, Les origines de la statique (Paris 1905), vol. I, p. 112ff.

nur die relative Kraft $P \cdot \cos\varphi$; denn φ ist ja zugleich der Winkel, den der Kreisbogen AA' mit der Vertikalen bildet.

Die enge Verwandtschaft, die zwischen den Begriffen des potentiellen Hebelarmes und der gravitas secundum situm besteht, ist nun natürlich ohne weiteres ersichtlich. Denken wir uns etwa einen Winkelhebel, dessen einer Arm mit der Horizontalen den Winkel α und dessen anderer den Winkel β bilde (Fig. 6), so wäre nach Jordanus, da die relativen Schwerkräfte nunmehr $p_1 \cdot \cos\alpha$ und $p_2 \cdot \cos\beta$ sind, die Gleichgewichtsbedingung

(4) $p_1 \cdot \cos\alpha : p_2 \cdot \cos\beta = l_2 : l_1$,

wenn wir mit l_1 und l_2 die entsprechenden reellen Hebelarme bezeichnen. Nach Lionardo würde dagegen die Gleichgewichtsbedingung, da sich die reellen Gewichte umgekehrt wie die potentiellen Hebelarme verhalten müssen, lauten:

(5) $p_1 : p_2 = l_2 \cdot \cos\beta : l_1 \cdot \cos\alpha$;

beide Proportionen sind aber natürlich identisch.

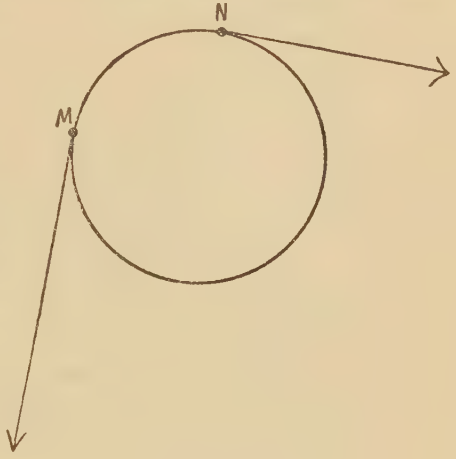

Fig. 7.

Die weitere Ausbildung des in diesen beiden Proportionen nur in verschiedener Form ausgedrückten Prinzipes ist das Verdienst eines italienischen Physikers der Renaissancezeit, des Guido Ubaldi del Monte, der zuerst den Archimedes in das Lateinische übersetzte, der aber auch einer der wenigen war, die wenigstens einige von Lionardos Ideen kennen lernten und erfaßten. Ubaldi erkannte bei seinen Untersuchungen über das Wellrad, daß zwei Kräfte, die an einem beliebigen, um eine Achse drehbaren Körper angreifen, im Gleichgewichte sind, wenn ihre statischen Momente gleich groß sind, falls man unter dem statischen Momente das Produkt aus dem potentiellen Hebelarm und der Kraft versteht.

Eine exakte Ableitung dieses Satzes hat Ubaldi wohl nicht mitgeteilt; es ist aber keineswegs unwahrscheinlich, daß er ihn, wie Mach[1] meint, aus dem von Archimedes bewiesenen Satz des Gleichgewichtes an dem geradlinigen horizontalen Hebel mittels des Prinzips gewann, daß zwei gleich große Kräfte, die an einem um eine Rolle gelegten Seile angreifen (Fig. 7), ohne Rücksicht auf ihre Richtung stets im Gleichgewichte sein müssen; denn infolge der völligen Symmetrie ist kein Grund ersichtlich, weshalb eine Drehung

[1] Ernst Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, I. Kap., 1, § 8; vgl. La Cour und Appel, Physik (deutsch von Siebert, Braunschweig 1905), Bd. I, S. 142.

eher in der einen als in der anderen Richtung erfolgen könnte. An diesem Gleichgewicht wird natürlich nichts gestört, wenn man in den beiden Punkten (M und N), in denen das Seil die Rolle verläßt, das Seil festnagelt und den Teil des Seiles, der zwischen den beiden Punkten (M und N) liegt, entfernt.

Wir zeichnen nun einen beliebigen Körper, der um eine durch den Punkt O gehende Achse drehbar ist, von dessen eigenem Gewichte abstrahiert werde und an dem in den Punkten A und B die Kräfte P_1 und

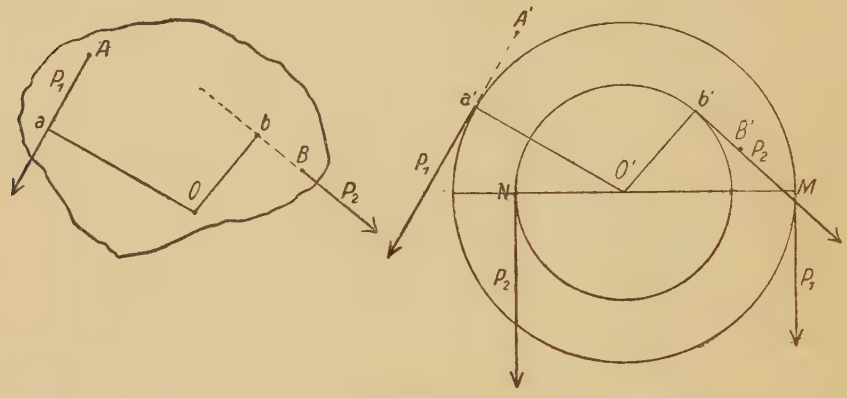

Fig. 8.

P_2 angreifen (Fig. 8). Dann besteht nach Ubaldi Gleichgewicht, wenn die Momente der Kräfte in bezug auf den Punkt O gleich groß sind. Bezeichnen wir die von dem Punkte O auf die beiden Kräfterichtungen gefällten Lote mit Oa und Ob, so lautet also die Gleichgewichtsbedingung

$$P_1 \times Oa = P_2 \times Ob. \tag{6}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung können wir folgendermaßen beweisen. Wir denken uns eine Doppelrolle, die aus zwei konzentrischen Rollen zusammengesetzt ist, eine Art ganz flachen Wellrades mit den beiden Radien Oa und Ob (Fig. 8 rechts). Wir zeichnen nun einen horizontalen Durchmesser und bringen auf diesem in dem Punkte M eine vertikale Kraft P_1 und in dem Punkte N eine vertikale Kraft P_2 an. Daß diese beiden Kräfte im Gleichgewichte sind, folgt ohne weiteres aus dem von Archimedes bewiesenen Satze über das Gleichgewicht an dem horizontalen geradlinigen Hebel; denn wir haben ja eben die beiden Hebelarme $O'M$ und $O'N$ infolge unserer Konstruktion so groß gezeichnet, daß sie gleich sind den Strecken Oa und Ob in der linken Figur; diese Strecken verhalten sich aber nach der zu beweisenden Behauptung (Gleichung 6) ja umgekehrt wie P_1 und P_2. Wir ziehen nun durch das Zentrum des Wellrades O' Parallele zu Oa und Ob und erhalten so die

Punkte a' und b', und in diesen Punkten denken wir uns wieder die Kraft P_1 und P_2 tangential angreifend.

Da nun nach dem Satze von dem Gleichgewichte an der Rolle die Kraft in a' mit der Kraft in M im Gleichgewicht ist und die Kraft in b' mit der Kraft in N, andererseits aber nach dem archimedischen Prinzipe die Kräfte in M und N untereinander im Gleichgewichte sind, so müssen also auch die Kräfte in a' und b' im Gleichgewichte sein.

An diesem Gleichgewichte wird nun aber auch dann nichts geändert, wenn man aus dem Wellrade Stücke etwa mit einer Säge herausschneidet oder etwa andere, beliebig geformte aufkittet, wofern nur an den Angriffspunkten der Kräfte selbst und an der Drehachse keine Veränderungen erfolgen. Man kann also das Wellrad derart so deformieren, daß es dieselbe Gestalt bekommt, wie der in Fig. 8 links abgebildete Körper. Man kann aber schließlich, wie aus einem auch von Ubaldi als selbstverständlich angenommenen Axiom der Mechanik folgt, die Angriffspunkte der Kräfte beliebig in der Richtung der Kräfte verschieben, so daß also die Kräfte P_1 und P_2 nicht mehr in den Punkten a' und b' angreifen, sondern in zwei Punkten A' und B', die in der rechten Figur genau die gleiche Lage haben, wie in der linken Figur die Punkte A und B. Da auch dann noch an dem rechts abgebildeten Körper Gleichgewicht besteht, so muß sich natürlich auch der links abgebildete, der ja jetzt von dem rechten durch nichts mehr unterschieden ist, im Gleichgewicht befinden. Durch diese Überlegung erscheint also der Ubaldische Momentensatz[1] mittels des Axioms von der Verlegbarkeit des Angriffspunktes einer Kraft auf das speziellere archimedische Hebelgesetz zurückgeführt.

[1] Ubaldi, Mechanicorum liber p. 106ff. (Pisauris 1577), De peritrochio.

Zweite Vorlesung.

Das Prinzip des Kräfteparallelogrammes.

Die Betrachtungen über den Hebel haben, wie wir in der letzten Vorlesung sahen, bereits im 13. Jahrhundert Jordanus Nemorarius und im 15. Jahrhundert Lionardi da Vinci zu der Erkenntnis geführt, daß eine Kraft, die in einer anderen als in ihrer eigenen Richtung Wirkungen hervorbringt, nie in ihrer ganzen Größe, sondern stets nur mit einem Teile zur Geltung kommen könne; und dieser Teil verhält sich, wie bereits Jordanus fand, zu der ganzen Kraft stets umgekehrt wie eine beliebige in der Richtung der Wirkung gelegene Strecke zu ihrer Projektion in der Richtung der Kraft. In dieser Erkenntnis steckt der Keim des nicht nur für die Mechanik, sondern für die ganze Physik grundlegenden Prinzipes, mit dem wir uns heute eingehender befassen wollen, nämlich des Prinzipes vom Kräfteparallelogramm, als dessen eigentlicher Begründer wohl der geniale, holländische Physiker Simon Stevin, ein älterer Zeitgenosse Galileis, anzusehen ist.

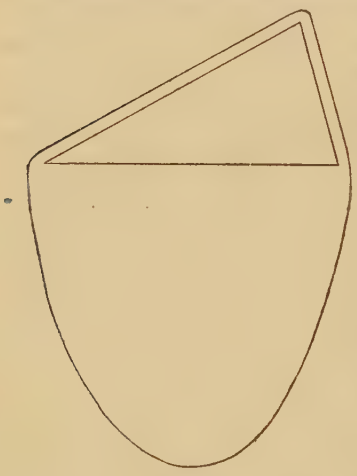

Fig. 9.

Stevin hat als erster in exakter Weise die Frage gelöst, auf welche Art die Wirkung zweier oder mehrerer verschieden großer und verschieden gerichteter Kräfte, die in einem Punkte angreifen, durch die Wirkung einer einzigen Kraft ersetzt werden könne; den Ausgangspunkt für diese so ungemein bedeutungsvolle Entdeckung bildete aber wieder das Problem der schiefen Ebene, das Stevin ebenfalls als erster in genialer Weise gelöst hat.

Ziemlich allgemein ist ja die schöne Figur bekannt, die mit der Überschrift „Wunder und doch kein Wunder“ das Titelblatt der „Hypomnemata mathematica“ Stevins schmückt. Diese Figur (Fig. 9) zeigt eine mit vierzehn schweren Kugeln belastete und in sich zurückkehrende Kette, die um ein Dreieck mit horizontaler Basis gelegt ist, die wir

uns aber lieber durch eine gleichmäßig schwere Kette ersetzt denken wollen.[1]

Es ist nun nach Stevin klar, daß sich diese Kette im Gleichgewichte befinden müsse; denn befände sie sich nicht im Gleichgewichte, so müßte sie sich doch — so schließt Stevin — zu bewegen beginnen; da aber eine solche Bewegung an den bestehenden Verhältnissen nicht das mindeste zu ändern vermöchte, da also auch die Ursache einer solchen Bewegung ohne jede Änderung sich stets genau gleich bliebe, so könnte eine solche Bewegung, wofern sie je begonnen hätte, überhaupt nie mehr aufhören. Daß aber eine solche ganz ziel- und zwecklose Bewegung ewig währen könnte, das anzunehmen sei völlig absurd.

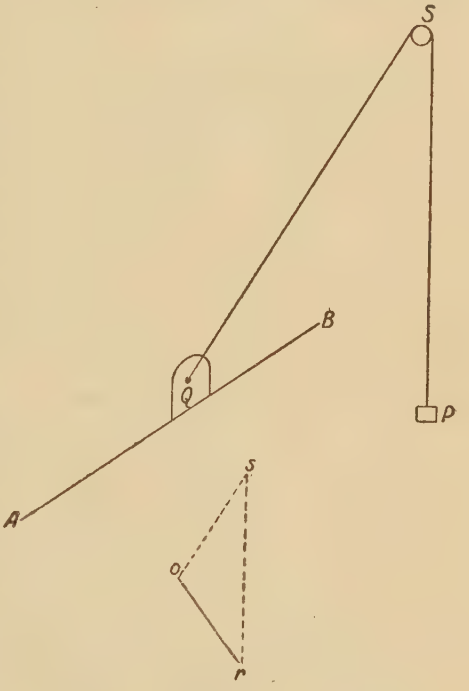

Fig. 10.

Durch diese faszinierende Betrachtung (auf deren Kritik ich mich hier nicht näher einlassen möchte[2]) gelangte Stevin zu dem Schlusse, daß die in sich zurückkehrende Kette sich im Gleichgewichte befinden müsse. Da aber nun der untere Teil der Kette jedenfalls für sich allein schon im Gleichgewicht sei, so müßte auch der übrige Teil der Kette im Gleichgewicht bleiben, wenn der untere Teil entfernt würde. Indem nun Stevin im besonderen ein Dreieck betrachtet, dessen eine Seite vertikal ist, erkennt er natürlich sofort, daß bei der schiefen Ebene dann Gleichgewicht besteht, wenn sich die Kraft zu der Last so verhält, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Nachdem derart Stevin die Ableitung des Gesetzes der schiefen Ebene gelungen war, betrachtet er sogleich einen allgemeineren Fall. Er denkt sich auf der schiefen Ebene AB (Fig. 10) eine Last von der Größe Q; von ihr führe nun zu einer Rolle ein Seil, das die Richtung QS

[1] Stevin denkt sich im besonderen auch die eine schiefe Seite des Dreiecks doppelt so lang wie die andere, so daß auf der einen vier, auf der anderen zwei Kugeln ruhen.

[2] Vgl. Haas, Die Entwicklungsgeschichte des Satzes von der Erhaltung der Kraft (Wien 1909), S. 25—26.

habe und an dessen anderem Ende ein Gewicht P ziehe. Um nun die Gleichgewichtsbedingung zu finden, hat man nach Stevin einfach ein Dreieck zu konstruieren, dessen eine Seite vertikal ist, dessen zweite auf der schiefen Ebene normal steht und dessen dritte die Richtung des Seiles hat. Ist dieses Dreieck ors, so besteht, wie Stevin ganz richtig erkennt, Gleichgewicht, wenn sich verhält

$$P : Q = os : sr.^1 \tag{1}$$

In dieser Erkenntnis, die Stevin ohne eigentlichen Beweis mitteilt, begegnet uns zum ersten Male deutlich das Prinzip, daß drei Kräfte[2] einander das Gleichgewicht halten, wenn sich Strecken, die nach Größe und Richtung diese Kräfte repräsentieren, zu einem Dreiecke zusammenfügen lassen; der Richtungssinn der Strecken muß dabei natürlich ein solcher sein, daß, wenn (Fig. 11) die erste Kraft die Richtung $\overrightarrow{AB}$ hat und wir den dritten Punkt des Dreiecks mit C bezeichnen, die zweite Kraft die Richtung $\overrightarrow{BC}$ hat und die dritte die Richtung $\overrightarrow{CA}$.

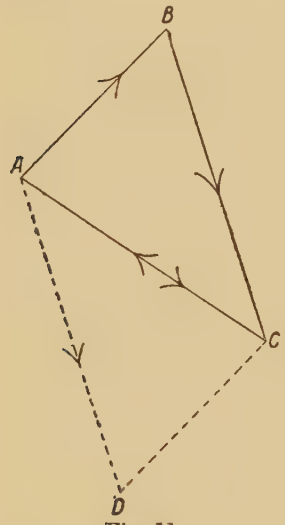

Fig. 11.

Da es aber nun als eine Selbstverständlichkeit erscheint, daß zwei gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte einander aufheben, so kann man das Gleichgewicht dreier Kräfte stets auch so auffassen, als ob eine der Kräfte der Resultierenden aus den beiden anderen Kräften gleich und entgegengesetzt wäre; und indem man das vorhin betrachtete Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzt, kann man dann ohne weiteres den Satz aussprechen, daß die Resultierende aus zwei in einem Punkte angreifenden Kräften nach Größe und Richtung durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt wird, dessen Seiten nach Größe und Richtung die beiden zusammenwirkenden Kräfte repräsentieren. Denn da (Fig. 11) die dritte Kraft, die durch die Strecke $\overrightarrow{CA}$ dargestellt wird, der ersten und der zweiten Kraft, die durch die Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ repräsentiert werden, das Gleichgewicht hält, so muß die Resultierende aus der ersten und zweiten Kraft der dritten Kraft gleich und entgegengesetzt sein, also durch die

[1] Stevin, Hypomnemata mathematica, Tom. IV (Leyden 1605), I. liber Staticae, Theor. 11, Prop. 19, Consectarium 6.

[2] In diesem Falle das vertikale Gewicht Q, der Zug von P und der Gegendruck der schiefen Ebene (vgl. Vorl. 15).

Strecke $\overrightarrow{AC}$ dargestellt werden; die zweite Kraft wird aber nach Größe und Richtung ebensowohl durch die Parallelogrammseite $\overrightarrow{BC}$ wie durch die Parallelogrammseite $\overrightarrow{AD}$ repräsentiert. — Von diesem Prinzipe des Kräfteparallelogramms macht nun Stevin, wenn er auch dieses Prinzip nirgends klar formuliert, doch wiederholt Gebrauch, um in außerordentlich geschickter Weise schwierige statische Probleme zu lösen, so namentlich in seiner „Spartostatica" (d. h. Lehre vom Gleichgewicht der Seilspannungen), die als Anhang zu seiner Statik erschienen ist.

Das Prinzip vom Kräfteparallelogramm, das derart durch Stevin seine Begründung erfuhr, erhielt nun eine wichtige Ergänzung durch ein ihm verwandtes Prinzip, das ungefähr gleichzeitig Galilei gelegentlich seiner Untersuchungen über die Wurfbewegung auffand, dessen Anfänge aber bis in das Altertum zurückreichen. Denn in der schon in der letzten Vorlesung erwähnten Mechanik des Heron von Alexandria, in diesem so ungemeininteressantenWerke, das aber bis vor kurze Zeit verschollen blieb, finden wir bereits die folgende bedeutungsvolle Erkenntnis.

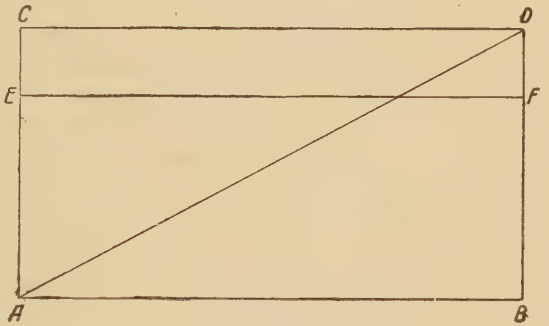

Fig. 12.

Es bewege sich ein Körper gleichförmig und geradlinig von dem Punkte A nach B (Fig. 12), und zwar brauche er zur Zurücklegung dieser Strecke die Zeit T. Gleichzeitig verschiebe sich aber die Linie AB selbst gleichförmig parallel zu sich selbst, so daß sie nach Ablauf der Zeit T die Lage CD inne habe; die Verschiebung erfolge senkrecht zu AB, so daß also $ACDB$ ein Rechteck sei. Zu einer bestimmten Zeit (t) nehme nun die sich verschiebende Gerade die Lage EF ein; dann befindet sich, wie Heron erkennt, zu der Zeit t der sich bewegende Körper in dem Punkte, in dem die Gerade EF die Diagonale des Rechtecks AD schneidet. Aus der gleichförmigen Bewegung des Körpers auf der Strecke AB und der gleichzeitigen gleichförmigen Verschiebung dieser Strecke resultiert demnach eine gleichförmige Bewegung längs der Diagonale.[1]

Diese rein geometrische Erkenntnis hat nun Galilei (dem aber die Stelle in der heronischen Mechanik offenbar nicht bekannt war) zu einer physikalischen erweitert, indem er das Axiom aufstellte, daß die Bewegungen, die ein Körper aus zwei verschiedenen

[1] Heron, Mechanik, I, 8, S. 20 (ed. Nix).

Ursachen ausführen solle, einander gegenseitig nicht beeinflussen, sondern sich einfach superponieren; daß also in dem besonderen Falle der Wurfbewegung, wie Galilei sagt, „die seitliche Bewegung sich gleichförmig erhalte und daß ebenso gleichzeitig die natürliche beschleunigte Bewegung sich proportional den Quadraten der Zeit behaupte und daß solche Bewegungen sich zwar mengen, aber nicht stören, ändern und hindern.“[1]

Galileis Auffassung bedeutet entschieden einen wesentlichen Fortschritt gegenüber der Mechanik Herons. Denn daß ein Körper, der etwa in einer vertikalen Röhre fällt, eine Parabel beschreibt, wenn diese Röhre durch irgend eine Vorrichtung (etwa ein Zahnradgetriebe) gleichförmig seitlich bewegt wird, ist gewiß eine rein geometrische Erkenntnis; aber auf bloß geometrischem Wege läßt sich doch nie die Erkenntnis gewinnen, daß das Beharrungsvermögen, das jeder sich selbst überlassene Körper im kräftefreien Zustande aufweist, sich auch dann nicht ändert, wenn der sich bewegende Körper gleichzeitig dem Einflusse einer anders gerichteten Kraft unterworfen wird. Galileis Erkenntnis ist darum entschieden eine physikalische und könnte als eine geometrische bloß dann dargestellt werden, wenn man hierbei stillschweigend das mechanische Relativitätsprinzip voraussetzt, das aber natürlich auch auf physikalischer Erfahrung beruht.

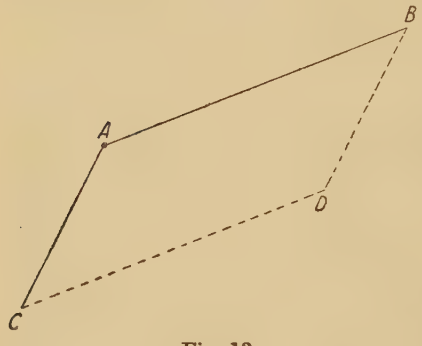

Fig. 13.

Aus der Annahme, daß die beiden Bewegungen, deren Kombination die Wurfbewegung ergibt, einander in keiner Weise beeinflussen, sondern unabhängig voneinander fortbestehen und sich einfach superponieren, folgt natürlich ohne weiteres, daß man den Aufenthalt des doppelt bewegten Körpers in jedem Augenblicke durch Konstruktion des sogenannten Bewegungsparallelogrammes ermitteln kann. Man trägt hierzu (Fig. 13) von der bekannten Stelle A, an der sich der Körper[2] zu irgend einer gegebenen Zeit befand, nach Größe und Richtung die beiden Wegstrecken AB und AC auf, die der Körper bei jeder der zu kombinierenden Bewegungen zurücklegen würde, wenn nur eine dieser beiden Bewegungen einzeln bestünde. Man konstruiert dann über den beiden so erhaltenen Strecken das sogenannte Bewegungsparallelogramm $ABDC$, und der Punkt D gibt dann stets den Aufenthaltsort des Körpers zu der

[1] Galilei, Discorsi, Vierter Tag, Theor. I, Propos. I, Worte Sagredos.

[2] Von der räumlichen Ausdehnung des Körpers muß man dabei natürlich abstrahieren, ihn also als materiellen Punkt ansehen.

betreffenden Zeit an. Damit soll jedoch keineswegs gesagt sein, daß der Körper auch tatsächlich in der Diagonale AD von A nach D gelangte; denn dies wird man im allgemeinen nur dann sagen können, wenn man die Bewegung lediglich während einer verschwindend kurzen Zeit betrachtet.

Das Parallelogrammprinzip, das Galilei nur auf die Kombination einer unter dem Einflusse der Trägheit und einer unter der Einwirkung einer konstanten Kraft erfolgenden Bewegung anwandte, hat dann Newton in der Einleitung zu seinen 1687 erschienenen „Mathematischen Prinzipien der Naturlehre" auf den Fall erweitert, daß ein Körper gleichzeitig dem Einflusse zweier verschieden gerichteter Kräfte unterliege. Der Körper beschreibt dann, wie Newton erkennt, stets in der gleichen Zeit die Diagonale eines Parallelogrammes, in der er unter dem Einflusse jeder der beiden Kräfte, falls diese einzeln wirkten, die Seiten des Parallelogrammes beschreiben würde. Diesen Satz fügt Newton als bloßen Zusatz, als erstes Corrolarium, seinen drei berühmten Bewegungsgesetzen hinzu; denn dieser Satz ergibt sich, wie Newton meint (indem er die von Galilei gewonnene Erkenntnis dabei stillschweigend voraussetzt), ohne weiteres aus dem zweiten Bewegungsaxiom, demzufolge die Änderung der Bewegung stets in der Richtung der einwirkenden Kraft erfolgt. Aus dem Prinzip vom Bewegungsparallelogramm folgt aber derart (eben infolge des zweiten Bewegungsaxioms) ohne weiteres wieder das Prinzip vom Kräfteparallelogramm, das deshalb Newton als zweites Corrolarium an seine drei Bewegungsgesetze anreiht.

In demselben Jahre wie Newton hat mit klarer Schärfe den Satz vom Kräfteparallelogramm, der seit Stevins Untersuchungen ganz in Vergessenheit geraten war, auch Varignon wieder aufgestellt, der ihn in seiner 1687 erschienenen „Nouvelle mécanique", mittels eines schönen von ihm entdeckten geometrischen Satzes, auf das Prinzip der statischen Momente und somit im Grunde auf das Hebelprinzip zurückzuführen suchte.[1]

Die Methode, nach der zwei Kräfte zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden, kann man nun leicht auf die Zusammensetzung beliebig vieler, in einem Punkte angreifender Kräfte ausdehnen; und unter Benutzung der Tatsache, daß in einem Parallelogramm zwei gegenüberliegende Seiten ja stets einander gleich und parallel sind, verfährt man hierzu am zweckmäßigsten folgendermaßen: man trägt, um zunächst die erste und die zweite Kraft zusammenzusetzen, von einem gegebenen Punkt O aus (Fig. 14) eine Strecke OA auf, die nach Größe und Richtung die erste Kraft darstellt; von dem Endpunkte dieser Strecke, also vom Punkte A, tragen wir nun die zweite Strecke AB auf, die nach Größe und Richtung die zweite Kraft repräsentiert (die Ebene, die durch beide Strecken OA und AB bestimmt ist, denken wir uns mit

[1] Varignon, Nouvelle mécanique (Paris 1725), Sect. I, Lemme XVI.

der Zeichenebene zusammenfallend). Dann ist nach dem Prinzip des Kräfteparallelogrammes die Resultierende der beiden Kräfte nach Größe und Richtung durch die Strecke OB bestimmt.

Diesen Vorgang, durch den wir aus den Strecken OA und AB die Strecke OB erhalten haben, bezeichnen wir als geometrische Addition. Solche Strecken, bei denen wir nicht nur ihre Länge, sondern auch ihre Richtung im Raum betrachten, nennen wir mit einem Ausdruck, den im Jahre 1843 Hamilton zugleich mit seiner Quaternionentheorie schuf, Vektoren;[1] und in übertragenem Sinne bezeichnen wir dann alle Größen, die durch einen Vektor darstellbar sind (wie beispielsweise auch die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, die Feldstärke) als vektorielle Größen oder als Vektoren schlechthin. Die Länge des Vektors nennen wir seine absolute Größe oder seinen absoluten Betrag; mit der Vorstellung der Richtung des Vektors müssen wir natürlich stets auch die Vorstellung eines bestimmten Richtungssinnes verbinden (den man in der Zeichnung in der Regel durch einen Pfeil andeutet).

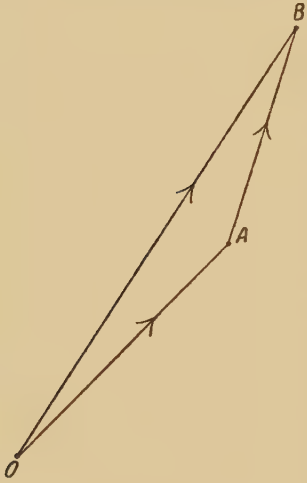

Fig. 14.

Im Gegensatz zu den Vektoren nennt man mit Hamilton solche Größen, denen keine bestimmte Richtung beigelegt werden kann (wie beispielsweise der Masse, der Dichte, der Temperatur), skalare Größen oder Skalare. Diese Unterscheidung zwischen Vektoren und Skalaren bringt man zweckmäßig auch in der Schreibweise der Abkürzungen für die physikalischen Größen zum Ausdruck, indem man, wie dies in der letzten Zeit üblich geworden ist, Vektoren mit deutschen (in Büchern gewöhnlich mit fettgedruckten), Skalare dagegen mit lateinischen Buchstaben bezeichnet. Betrachten wir bei einem Vektor in dem Zusammenhange einer Untersuchung nur den absoluten Betrag, so werden wir in diesem Falle natürlich den Vektor statt mit dem sonst gebräuchlichen deutschen mit dem gleichen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Man bezeichnet also den absoluten Betrag des Vektors $\mathfrak{A}$ mit A oder auch durch das Symbol $|\mathfrak{A}|$.

Kräfte sind Vektorgrößen und geometrisch addierbar. Die Resultierende aus drei Kräften erhält man somit, indem man zunächst die Resultierende aus zweien bildet und zu dieser Resultanten die dritte Kraft geometrisch hinzuaddiert. Die einfache geometrische Anschauung zeigt uns aber dann ohne weiteres, daß es ganz

[1] Phil. Magazine, 39, 1846, p. 26.

einerlei ist, ob man die dritte Kraft zu der Resultanten aus der ersten und zweiten hinzufügt oder aber etwa zunächst die Resultante aus der ersten und dritten Kraft bildet und mit dieser die zweite Kraft vereinigt. Es gelten also auch bezüglich der geometrischen Addition das Kommutations- und das Assoziationsgesetz.

Die Resultierende aus n, in demselben Punkte angreifenden Kräften erhält man also, indem man in beliebiger Reihenfolge die Vektoren, die diese Kräfte darstellen, geometrisch aneinanderfügt und zu dem schließlich erhaltenen Endpunkt von dem Ursprung eine gerade Linie zieht; und im allgemeinen kann man daher sagen, daß ein System von n Kräften im Gleichgewichte ist, wenn die geometrische Addition der die n Kräfte darstellenden Vektoren schließlich wieder zu dem Ursprung zurückführt, wenn sich also die Vektoren zu einem Polygon zusammenfügen lassen, dessen Seiten natürlich nicht in einer einzigen Ebene liegen müssen.

Die Lösung, die das Prinzip des Kräfteparallelogramms für das Problem der Kräftezusammensetzung gibt, gestattet nun auch ohne weiteres die Durchführung der umgekehrten Aufgabe, die also darin besteht, eine gegebene Kraft in zwei oder mehrere Kräfte nach bestimmten Richtungen zu zerlegen. Für den besonderen Fall der Zerlegung in zwei zu einander senkrechte Komponenten ist diese Aufgabe sogar früher gelöst worden als die der Kräftezusammensetzung; nämlich (wie wir sahen) schon im 13. Jahrhundert von Jordanus gelegentlich der Betrachtung des schiefen Hebels.

Die Aufgabe der Zerlegung einer gegebenen Kraft ist im allgemeinen natürlich unbestimmt; haben wir durch Zusammensetzung der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ eine Kraft $\mathfrak{R}$ erhalten, so können wir eine Kraft, die $\mathfrak{R}$ gleich und parallel ist, natürlich auch wieder in zwei Komponenten zerlegen, die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleich und parallel sind. Es ist dies aber natürlich nicht die einzige Möglichkeit einer Zerlegung der Kraft $\mathfrak{R}$; wir können sie in Komponenten von ganz beliebiger Richtung zerlegen, da ja die Strecke, die $\mathfrak{R}$ repräsentiert, die Diagonale zu einer doppelt unendlichen Mannigfaltigkeit von Parallelogrammen[1] bilden kann. Es genügt also auch nicht die Angabe der Richtung der einen der beiden Komponenten. Es müssen entweder die Richtungen beider Komponenten gegeben sein, oder aber die absoluten Größen der beiden Komponenten oder es muß schließlich eine der beiden Komponenten sowohl nach ihrer Größe als auch nach ihrer Richtung festgelegt sein.

Unter allen Möglichkeiten der Zerlegung ist nun eine von besonderer Wichtigkeit und von besonderer Bedeutung für die Ökonomie der mecha-

[1] Daß diese Mannigfaltigkeit doppelt unendlich ist, erkennt man leicht daraus, daß man die beiden Komponenten beliebige Winkel miteinander bilden lassen kann, daß aber auch dann, wenn dieser Winkel festgelegt ist, z. B. zu 90°, noch immer unendlich viele Möglichkeiten der Zerlegung übrig bleiben.

nischen Wissenschaft, und das ist die Zerlegung in solche Komponenten, die zu einander senkrecht stehen. Den Physikern war ja seit den ältesten Zeiten die Tatsache bekannt, daß eine Kraft auf einen Körper, der sich nur senkrecht zu der Kraftrichtung bewegen kann, überhaupt keine Wirkung auszuüben vermag, wie z. B. die Schwerkraft einen auf einer horizontalen Fläche befindlichen Körper überhaupt nicht zu bewegen vermag. Denken wir uns daher eine Kraft in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegt (die beide mit der ursprünglichen Kraft in der gleichen Ebene liegen), so kann also keine der beiden Komponenten in der Richtung der anderen Komponente die mindeste Wirkung hervorbringen.

Die Größe der beiden Komponenten läßt sich in diesem Falle sehr leicht angeben, da bei der orthogonalen Zerlegung jede Komponente einfach der Projektion der zu zerlegenden Kraft auf die betreffende Komponentenrichtung gleich ist; es ist also

$$(2) \qquad \begin{cases} P = R \cdot \cos(\mathfrak{R}, \mathfrak{P}) . \\ Q = R \cdot \cos(\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}) \end{cases}$$

— Formeln, die in dieser Einfachheit natürlich nur für den Fall der orthogonalen Zerlegung gelten.

Da wir die zweite Komponente $\mathfrak{Q}$ in einer Ebene, die auf der Komponente $\mathfrak{P}$ senkrecht steht, nun abermals in zwei weitere aufeinander senkrechte Komponenten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ spalten können, können wir also im allgemeinen stets jede Kraft in drei beliebige, zueinander senkrechte Komponenten zerlegen; diese müssen sich aber stets als völlig unabhängig voneinander erweisen, da ja keine der Komponenten in der Richtung einer der beiden anderen Komponenten irgend eine Wirkung hervorbringen kann.

Die Methode der orthogonalen Kraftzerlegung, die sich im Keime bereits bei Jordanus Nemorarius und in deutlicherer Form dann in den Untersuchungen von Stevin und Galilei[1] über die schiefe Ebene findet, diese Methode gewann nun eine ganz besondere Bedeutung seit der Erfindung der analytischen Geometrie. Die analytische Geometrie ist eine Schöpfung des großen Philosophen René Descartes, der ihre Grundzüge zuerst im Jahre 1637 veröffentlichte.[2] Merkwürdigerweise fanden jedoch die Methoden der analytischen Geometrie erst verhältnismäßig spät Eingang in die Physik. In Newtons großem mechanischen Werke, das ein halbes Jahrhundert später erschien, findet sich noch keinerlei Anwendung der analytischen Geometrie auf physi-

[1] Vgl. die 15. Vorlesung.

[2] Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la dioptrique, les météores et la geométrie, qui sont des essais de cette méthode.

kalische Probleme. Der erste, der auf den Gedanken kam, die bei der Untersuchung eines bestimmten physikalischen Problems auftretenden Kräfte in drei orthogonale und daher voneinander unabhängige Komponenten zu zerlegen, war (wie wir in einer späteren Vorlesung noch ausführlicher sehen werden) Leonhard Euler, der von diesem Verfahren zuerst in seiner 1736 erschienenen Mechanik Gebrauch machte. Der erste aber, der diese Zerlegung nach drei fixen Koordinatenachsen vornahm, war Mac Laurin, der derart zuerst in seinem 1742 erschienenen Werke „A complete system of fluxions" die Mechanik mit der analytischen Geometrie des Raumes verknüpfte.

Von welch unermeßlichem ökonomischen Werte sich aber diese Verknüpfung der beiden Wissenszweige erweist, das wird sogleich an dem Problem der Kräftezusammensetzung deutlich. Stünde uns die einfache Methode der Zerlegung nach drei Koordinatenachsen nicht zu Gebote, so müßten wir zunächst (da ja im allgemeinen die Kräfte nicht in der gleichen Ebene liegen und daher eine einfache Zeichenkonstruktion nicht zum Ziel führen kann) die Richtung der ersten Kraft durch die Angabe zweier Winkel festlegen, die sie etwa mit zwei bestimmten Ebenen bildet. Dasselbe wäre bei der zweiten Kraft der Fall, die natürlich im allgemeinen zwei andere Winkel bilden würde. Durch nicht sehr einfache trigonometrische Rechnungen könnten wir dann, wenn uns die Größe und die Winkel der beiden Kräfte, insgesamt also sechs Größen bekannt sind, die Länge und die beiden Winkel für die Resultierende ermitteln; und dieses etwas komplizierte Verfahren müßten wir, wenn n Kräfte zusammenzusetzen sind, im ganzen $n$mal durchführen.

Ungleich einfacher gelingt die Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe der analytischen Geometrie des Raumes, wenn wir Größe und Richtung jeder Kraft durch die absoluten Werte ihrer drei Komponenten nach den drei Koordinatenachsen bestimmen. Die erste Kraft $\mathfrak{K}_1$ habe etwa die Komponenten X_1, Y_1, Z_1; dann ist nach einer bekannten Formel der Geometrie des Raumes der absolute Betrag der Kraft

$$K_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}. \tag{3}$$

Hierdurch ist ihre Größe gegeben; ihre Richtung ist aber durch die Winkel bestimmt, die sie mit den drei Koordinatenachsen bildet und die wir α_1, β_1, γ_1 nennen wollen. Von diesen Winkeln sind natürlich nur zwei unabhängig variabel, während der dritte mit den beiden anderen stets durch die aus der Geometrie bekannte Relation verknüpft ist

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1. \tag{4}$$

Die Kosinusse der drei Winkel sind aber, da ja jede Komponente der Projektion der Kraft auf die betreffende Koordinatenrichtung gleich ist, ohne weiteres durch die Werte von X_1, Y_1, Z_1 darstellbar; es sind nämlich

$$(5)\qquad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \dfrac{X_1}{K_1} = \dfrac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}, \\ \cos\beta_1 = \dfrac{Y_1}{K_1} = \dfrac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}, \\ \cos\gamma_1 = \dfrac{Z_1}{K_1} = \dfrac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}. \end{cases}$$

Durch ihre drei Komponenten ist somit tatsächlich jede Kraft nach Größe und Richtung vollkommen bestimmt. Um nun die Resultierende $\mathfrak{R}$ der beiden Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zu ermitteln, tragen wir (Fig. 15)

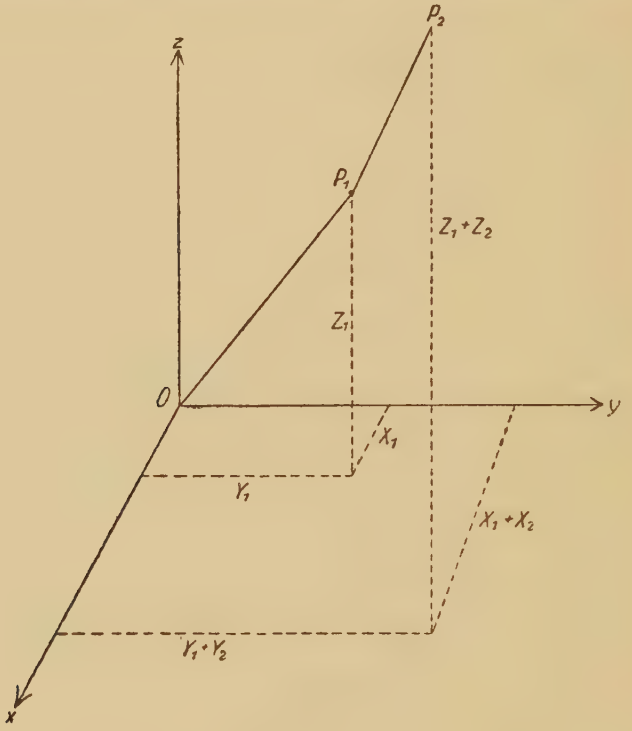

Fig. 15.

in dem Endpunkte des Vektors, der die Kraft $\mathfrak{K}_1$ darstellt, also in dem Punkte P_1 mit den Koordinaten X_1, Y_1, Z_1 einen zweiten Vektor auf, der die Kraft $\mathfrak{K}_2$ repräsentiert, deren Komponenten X_2, Y_2, Z_2 seien. Der Endpunkt des zweiten Vektors, der Punkt P_2, hat dann, wie ohne weiteres die geometrische Anschauung zeigt, die Koordinaten

$$X_1 + X_2, \quad Y_1 + Y_2, \quad Z_1 + Z_2$$

(wobei aber ausdrücklich daran erinnert sei, daß jede dieser sechs Kraftkomponenten sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann).

Nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm ist nun der Punkt P_2 zugleich der Endpunkt eines von O aus gezogenen Vektors OP_2, der die resultierende Kraft $\mathfrak{R}$ darstellt; die Koordinaten des Punktes P_2 repräsentieren daher zugleich die Komponenten der Kraft $\mathfrak{R}$ in den Richtungen der drei Koordinatenachsen.

Verallgemeinern wir unsere Betrachtung auf den Fall, daß n Kräfte $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \ldots \mathfrak{K}_n$ zu einer Resultierenden zusammenzusetzen seien, so können wir also, wenn wir uns der Hilfsmittel der analytischen Geometrie bedienen, sofort Größe und Richtung der Resultierenden feststellen. Hat nämlich jede der n Kräfte $\mathfrak{K}_h$ $(h = 1, 2 \ldots n)$ die Komponenten X_h, Y_h, Z_h (die uns entweder von vornherein gegeben sind oder die wir sonst, wenn uns absoluter Betrag und Richtung der Kräfte bekannt sind, sofort mittels der Formeln (5) berechnen können) — dann hat die resultierende Kraft die Komponenten

$$R_x = \Sigma X_h, \quad R_y = \Sigma Y_h, \quad R_z = \Sigma Z_h. \tag{6}$$

Der absolute Betrag der Resultierenden ist also

$$R = \sqrt{(\Sigma X_h)^2 + (\Sigma Y_h)^2 + (\Sigma Z_h)^2}. \tag{7}$$

Die Winkel, die die Resultierende mit den Koordinatenachsen bildet, sind aber bestimmt durch die Gleichungen

$$\cos\alpha^* = \frac{\Sigma X_h}{R}, \quad \cos\beta^* = \frac{\Sigma Y_h}{R}, \quad \cos\gamma^* = \frac{\Sigma Z_h}{R}, \tag{8}$$

wobei für R der Wert aus Gleichung (7) einzusetzen ist.

Sollen also n in einem Punkte angreifende Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so müssen, da ja dann ihre Resultierende verschwinden muß, die drei Gleichungen erfüllt sein

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma X_h &= 0, \\ \Sigma Y_h &= 0, \\ \Sigma Z_h &= 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Dritte Vorlesung.

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Die Maschinen, aus deren Betrachtung die Grundgesetze der Statik hervorgegangen sind, haben es dem Menschen ermöglicht, seine Kraft scheinbar ins Unbegrenzte zu steigern, so daß Archimedes einst begeistert ausrufen konnte: „Weise mir nur einen Ort an, wo ich stehen kann, und ich will die Erde bewegen" („*Δός μοι ποῦ στῶ καὶ τὴν γῆν κινήσω*"). Durch die mechanischen Maschinen kann der Mensch Lasten heben, die er sonst nicht von der Stelle rücken könnte; durch sie kann er Druckwirkungen hervorbringen, die er durch die bloße Kraft seiner Arme nie erzielen könnte; und er kann die Kraft, die zur Erreichung eines Effektes entfaltet werden muß, wie des Archimedes Ausspruch bekundet, noch beliebig verringern, wenn er sich nur bei dem Hebel genügend weit von der Drehachse entfernt, oder bei einem Flaschenzug die Zahl der Rollen genügend vermehrt.

Aber die einfachsten Beobachtungen mußten doch bald zeigen, daß diese anscheinend unbegrenzte Verminderung der notwendigen Kraft doch nicht ohne eine anderweitige Kompensation vor sich gehen kann. Die Last, die bei der Anwendung einer einfachen, festen Rolle nur gehoben werden kann, wenn an dem Seile gleichzeitig zehn Männer ziehen, kann wohl bei der Verwendung eines Flaschenzuges von fünf festen und fünf losen Rollen auch durch einen einzigen Mann gehoben werden; aber während im ersten Falle das Gewicht auch um einen Meter gehoben wird, wenn durch die Hände der ziehenden Männer 1 m des Seiles wandert, wird im zweiten Falle der einzelne Mann, der 1 m des Seiles durch seine Hände zieht, das Gewicht nur um 1 dm heben können. Was an Kraft gewonnen wird, geht also an Hubhöhe verloren. Der einzelne Mann muß seine zehnmal geringere Kraft, wie die Beobachtung zeigt, durch eine ungefähr zehnmal so lange Zeit wirken lassen, um zu dem gleichen Resultate zu gelangen, wie die zehn Männer in der einfachen Zeit. „Es tritt" — so äußert sich treffend Heron von Alexandria in seiner ‚Mechanik' — „bei Werkzeugen von großer Kraftentfaltung stets eine Verzögerung ein, weil wir desto mehr Zeit gebrauchen, je geringer die bewegende Kraft im Verhältnis zu der zu bewegenden Last

ist, so daß Kraft zu Kraft und Zeit zu Zeit in demselben, jedoch umgekehrten Verhältnisse stehen."[1]

Diese offenbar sehr alte Erkenntnis von dem Zeitverluste bei der Anwendung der Maschinen stellt wohl den Kern des Prinzipes dar, mit dessen Entwicklung wir uns in der heutigen Vorlesung beschäftigen wollen und das allmählich zu einer so fundamentalen Rolle in der Mechanik gelangte. Es ist die „goldene Regel der Mechanik", das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, wie es, einer alten Tradition folgend, auch heute noch die Physiker nennen.

Zur Ausbildung dieses Prinzipes hat jedenfalls aber auch das wissenschaftlich-ökonomische Bedürfnis beigetragen, die Erkenntnisse zu vereinigen, die bei der Untersuchung des Gleichgewichtes an mannigfachen Maschinen, wie namentlich am Hebel, an der schiefen Ebene, am Keil, an der Rolle und an den Flaschenzügen, gewonnen worden waren. Dadurch, daß man das allen diesen Fällen Gemeinsame heraushob und von allem abstrahierte, was nur durch die Besonderheit der betreffenden Maschine begründet ist, mußte man zu einer universellen Formel zu gelangen trachten, die in so allgemeiner und einfacher Form wie möglich die für den Gleichgewichtszustand als solchen charakteristische Bedingungen angibt, die die bereits erforschten Fälle als Spezialfälle in sich schließt, die es zugleich aber auch ermöglicht, für nicht näher bekannte und komplizierte Maschinen Gleichgewichtsbedingungen anzugeben, ohne daß es erst nötig wäre, den inneren Mechanismus der Kraftübertragung in diesen Maschinen zu ergründen.[2]

Diese Aufgabe erfüllt nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, das wohl zu den ältesten Gesetzen der theoretischen Physik gehört. Sein Ursprung verrät sich in seinem Namen, in dem trotz der richtigeren Worte „Arbeit" oder „Verrückung" in der Regel noch immer das traditionelle Wort „Geschwindigkeit" gebraucht wird; und dieses Wort, das jedem der die Geschichte des Prinzipes nicht kennt, so merkwürdig erscheinen muß, weist eben deutlich auf das grundlegende Gesetz der antiken Dynamik hin, das die Proportionalität zwischen der wirkenden Kraft und dem Produkte aus der Masse und ihrer Geschwindigkeit lehrte. Dieselbe Kraft bewegt nach diesem von Aristoteles herrührenden Satze eine zehnmal so große Masse in der gleichen Zeit nur durch den zehnten Teil des Weges, durch den sie in dieser Zeit die einfache Masse bewegt. Aus der Anwendung dieses Gesetzes, das eine gewisse Verwandtschaft mit dem zweiten Newtonschen Bewegungsaxiom zeigt und dessen Unrichtigkeit sich eben aus der Unkenntnis des Beharrungsvermögens erklärt[3] — aus der Anwendung dieses Gesetzes

[1] Herons Mechanik II, 22; p. 152 (ed. Nix).
[2] Vgl. Ernst Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Erstes Kapitel, 4, 11.
[3] Vgl. Vorlesung 5.

auf den Hebel scheint aber nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgegangen zu sein.

Denn wenn es der Hebel uns ermöglicht, durch ein bewegendes Gewicht von etwa 1 kg ebensowohl eine Last von 1 kg wie auch eine solche von 3 kg zu heben (wenn diese dementsprechend der Drehachse genähert ist), so müßte sich ja zufolge dem aristotelischen Theorem — so schloß man — die dreifache Last mit einer dreimal kleineren Geschwindigkeit aufwärtsbewegen als die einfache Last. Da die einfache Last in der einfachen Entfernung aber offenbar ebenso rasch aufsteigt, wie das bewegende Gewicht sinkt, so müßte also, wenn die Last $n$mal so groß ist wie die Kraft, die Aufwärtsbewegung der Last $n$mal langsamer vor sich gehen, als die Abwärtsbewegung der bewegenden Kraft.

Ein Zufall, so möchte man fast sagen, fügt es, daß, obwohl das aristotelische Theorem falsch ist und, selbst wenn es richtig wäre, doch sicher nicht in dieser Art auf den Hebel angewendet werden dürfte, dennoch, da die beiden Fehler einander aufheben, die falsche Anwendung des falschen Prinzipes ein richtiges Resultat ergibt. Man braucht, um sich hiervon zu überzeugen, nur so, wie es Aristoteles oder seine Schüler in den uns unter dem Namen des Aristoteles überlieferten „Mechanischen Problemen" taten[1], die Kreisbogen zu vergleichen, die Kraft und Last beschreiben, wenn sie sich angenähert im Gleichgewichte befinden (wir müssen „angenähert" sagen, weil ja bei völligem Gleichgewichte überhaupt keine Bewegung erfolgen könnte). Die in gleichen Zeiten von Last und Kraft zurückgelegten Bogen verhalten sich nun, wie ohne weiteres die geometrische Betrachtung zeigt, so wie die Abstände der Last und der Kraft von der Drehachse; diese Abstände verhalten sich aber wiederum im Gleichgewichtsfalle umgekehrt wie Last und Kraft, so daß sich also tatsächlich bei einer Bewegung aus dem Gleichgewichtszustande die Geschwindigkeiten von Kraft und Last umgekehrt zueinander verhalten wie diese selbst.

Das Hebelprinzip und das Prinzip der Geschwindigkeiten vertauschten im Laufe der weiteren Entwicklung der Mechanik öfter ihre Stellung zueinander. Bald wurde aus dem Hebelprinzip als dem ursprünglich gegebenen das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner einfachsten Gestalt abgeleitet, bald wieder der umgekehrte Weg eingeschlagen. Jedenfalls aber bedurfte das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, um zu einem Grundgesetze der Statik zu werden, einer richtigeren Begründung und einer allgemeineren Fassung, die seine Anwendung auch auf kompliziertere Fälle gestattet.

In dieser Hinsicht vollzog sich ein wesentlicher Fortschritt im dreizehnten Jahrhundert, in jener Zeit eines so gewaltigen geistigen Aufschwunges, dessen Bedeutung für die Entwicklung der Naturwissenschaft leider noch immer viel zu wenig gewürdigt wird. Dieser wichtige Fort-

[1] Probl. mechan., cap. 1.

schritt knüpft sich an den Namen des Jordanus Nemorarius, des genialen Forschers, dessen wir schon in einer früheren Vorlesung gedachten und über dessen Persönlichkeit uns eben leider gar nichts Sicheres bekannt ist.

Jordanus hat, wie wir bereits sahen[1], deutlich erkannt, daß bei einer schrägen Stellung eines Hebels für die statischen Wirkungen nicht die ganze Schwere des Gewichtes in Betracht komme, sondern nur die „gravitas secundum situm", wie er sie nannte, und er hat auch erkannt, daß sich diese gravitas secundum situm zu dem gesamten Gewichte umgekehrt verhält wie die Länge eines beliebig kleinen Kreisbogens, den aus der betreffenden Stellung des Hebels der Angriffspunkt beschreiben würde, zu der vertikalen Projektion dieses Bogenelementes. Nun ist aber das Verhältnis der vertikalen Projektion zum Kreisbogen gleich dem Kosinus des Winkels, den die Richtung der Verschiebung mit der Vertikalen bildet; wir wollen diesen Winkel (der gleich demjenigen ist, den der Hebel mit der Horizontalen einschließt) φ nennen.

Da also das relative Gewicht gleich ist dem absoluten, multipliziert mit $\cos\varphi$, und da nach Jordanus in der Geschwindigkeitsformel die tatsächlichen Gewichte durch die relativen zu ersetzen sind, so muß somit die Proportion erfüllt sein

$$p_1 \cdot \cos\varphi : p_2 \cdot \cos\varphi = v_2 : v_1$$

oder

$$p_1 \cdot v_1 \cdot \cos\varphi = p_2 \cdot v_2 \cdot \cos\varphi.$$

So tritt bei Jordanus, der diese Gleichung freilich nicht in der modernen Terminologie aussprach, zuerst an die Stelle des Produktes aus Gewicht und Geschwindigkeit, das man bis dahin allein betrachtet hatte, das Produkt aus Gewicht und aus der Projektion des von ihm in der Zeiteinheit durchlaufenen Weges auf die Richtung, in der die Schwerkraft wirkt.

Bestand also das eine große Verdienst des Jordanus darin, daß er zuerst die Notwendigkeit erkannte, bei der Bestimmung der „virtuellen Geschwindigkeiten" auch den Richtungsunterschied zwischen der Kraft und der Bewegung zu berücksichtigen, so war ein zweiter großer Fortschritt, den die Statik Jordanus verdankt, der, daß Jordanus das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten statt auf das falsche aristotelische Bewegungsaxiom (demzufolge die Kraft proportional sein solle dem Produkte aus der Masse und der Geschwindigkeit) auf ein anderes, auf ein richtiges Prinzip stützte, auf dasselbe, das später Descartes[2] als Ausgangspunkt aller mechanischen Betrachtungen

[1] Vgl. Vorlesung 1.

[2] Tractatus de Mechanica, Anfang: Machinarum harum omnium inventio unico tantum principio innititur, quod nimirum iisdem viribus, quibus pondus 100 librarum in duorum pedum altitudinem attolli potest, iisdem inquam aliud quoque 200 librarum in unius pedis altitudinem possit elevari.

wählte. Dieses Prinzip, das Jordanus allerdings nicht scharf hervorhebt, das aber doch ganz deutlich zwischen seinen Worten zu lesen ist, sagt aber nichts anderes aus, als daß dieselbe Ursache, die ein Gewicht bis zu einer bestimmten Höhe erhebt, das n-fache Gewicht bis zum n-ten Teile dieser Höhe erheben würde.

Die Ideen des Jordanus kehren, zum Teil richtig erfaßt, zum Teil aber auch mißverstanden, bei vielen späteren Forschern wieder, so bei Lionardo da Vinci, bei Cardanus und bei Ubaldi. Aber auch Galilei macht in recht geschickter Weise bei mehreren Gelegenheiten von dem Prinzipe Gebrauch, so namentlich bei der Untersuchung der schiefen Ebene[1] und bei der Behandlung hydrostatischer Probleme.[2]

Doch zeigten alle diese Untersuchungen keinen wesentlichen Fortschritt über das eben schon von Jordanus aufgefundene Prinzip, demzufolge bei Kraft und Last die Produkte aus den Gewichten und den Projektionen der von den Gewichten in einer bestimmten Zeit durchlaufenen Wege auf die Vertikale gleich sein müßten. Erst Johann Bernoulli verdankt das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten seine allgemeinere und präzisere Fassung, durch die es zu einer fundamentalen Rolle in der Statik befähigt wurde.

In dieser neuen Form hat Johann Bernoulli das Prinzip zuerst in einem Briefe mitgeteilt, den er im Jahre 1717 an Varignon richtete und den dieser dann in die zweite (posthum 1725 erschienene) Auflage seiner Nouvelle mécanique aufnahm. Das Bernoullische Prinzip lautet nun folgendermaßen:

Mehrere verschiedene Kräfte sollen in verschiedenen Richtungen wirken, um einen Punkt, eine Linie, eine Fläche oder einen Körper im Gleichgewichte zu erhalten; man denke sich nun, daß dem ganzen System ein kleiner Ruck (un petit mouvement) erteilt werde; es wird somit jede Kraft (sofern sie nicht gerade zufällig auf der Richtung dieser kleinen Bewegung senkrecht steht) durch diese eine Verschiebung ihres Angriffspunktes entweder in der Richtung der Kraft oder dieser entgegengesetzt erfahren. Die Verschiebungen der Angriffspunkte sind aber nichts anderes als die Projektionen der von den Angriffspunkten zurückgelegten Wege auf die Richtungen der Kräfte.

Es gelange z. B. durch den kleinen Ruck der Punkt A, in dem eine Kraft angreift, nach dem unendlich nahen Punkte M (Fig. 16), der Punkt B, in dem eine zweite Kraft angreife, nach N. Die Richtungen, die die Kräfte in A und in M haben, können nur unendlich wenig voneinander verschieden sein; dann ist die Verschiebung des Angriffspunktes in der Richtung der Kraft in dem ersten Falle durch die Strecke AM', in dem zweiten Falle durch die Strecke BN' dargestellt.

[1] Discorsi, 6. Tag.

[2] In der Schrift: Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua.

Die Produkte aus den Kräften und aus den Verschiebungen ihrer Angriffspunkte in der Kraftrichtung nennt nun Johann Bernoulli „Energien". Sie mögen positiv gerechnet werden, wenn die Projektion die gleiche Richtung hat wie die Kraft, dagegen negativ, wenn die beiden Richtungen entgegengesetzt sind. (Es ist also in Fig. 16 bei der in A angreifenden Kraft die „Energie" positiv, dagegen bei der zweiten in B angreifenden Kraft negativ.) Dann kann man nach Johann Bernoulli das allgemein gültige Prinzip aussprechen: daß bei jedem Gleichgewichte beliebiger Kräfte stets die Summe der positiven Energien gleich sei der absoluten Summe der negativen Energien.[1] Bernoulli teilt also alle die Energien in zwei Gruppen, deren eine positive, deren andere negative Werte hat; und das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten sagt dann aus, daß die Summe der absoluten Beträge bei beiden Gruppen gleich groß sein muß.

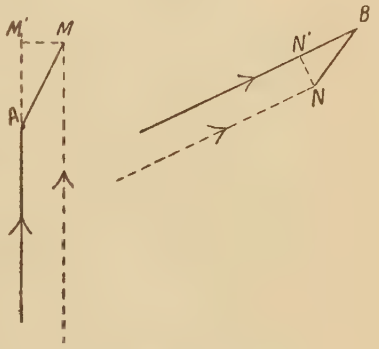

Fig. 16.

Nachdem dieses Bernoullische Prinzip bereits bei Varignon selbst vielfach Anwendung gefunden hatte[2] und dann auch Maupertuis[3] und Euler[4] als Ausgangspunkt wichtiger Untersuchungen gedient hatte, ist es dann durch Lagrange zu dem eigentlichen Fundamentalgesetze der Mechanik ausgestaltet worden. In seiner berühmten, 1788 in erster Auflage erschienenen „Mécanique analytique" hat sich Lagrange die Aufgabe gestellt, die ganze Mechanik auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten als auf die Grundformel zurückzuführen, aus der sich alle übrigen Resultate der Mechanik durch rein algebraische Operationen gewinnen lassen müssen.

Lagrange selbst hat das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten folgendermaßen klar formuliert: „Wenn ein beliebiges System von beliebig vielen Körpern oder Punkten, deren jeder durch beliebige Kräfte angegriffen wird, im Gleichgewichte ist und man diesem System eine beliebige kleine Bewegung erteilt, infolge deren jeder Punkt eine un-

---

[1] Varignon, Nouvelle mécanique (2. ed., Paris 1725), vol. 2, p. 176, Theor. 40: En tout équilibre de forces quelconques, en quelque manière qu'elles soient appliquées, et suivant quelques directions qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement, la somme des énergies affirmatives sera égale à la somme des énergies négatives prises affirmativement.

[2] Nouvelle mécanique, 2. ed. Sect. IX.

[3] „Loi du repos" (Oeuvres, Lyon 1756, vol. IV, p. 45ff.); vgl. hierüber E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 1. Kapitel, 4, 15—16.

[4]) Mechanica (Petersburg 1736).

endlich kleine Strecke durchläuft, so ist die Summe aller Kräfte, jede multipliziert mit der Strecke, welche der Punkt, an dem sie wirkt, in der Richtung dieser Kraft durchläuft — eine Strecke, die man als Maß der virtuellen Geschwindigkeit ansehen und geradezu als virtuelle Geschwindigkeit bezeichnen kann — immer gleich null, wenn man die kleine, im Sinne der Kraft durchlaufene Strecke als positiv und die im entgegengesetzten Sinne durchlaufene als negativ ansieht."

Das derart von Johann Bernoulli aufgestellte und von Lagrange weiter ausgestaltete Theorem bedeutet nun in doppelter Hinsicht einen außerordentlichen Fortschritt gegenüber den älteren Fassungen des Prinzipes der Geschwindigkeiten. Der eine besteht in der Schaffung des präziseren Begriffes der virtuellen Verrückungen, der zweite darin, daß das Prinzip, das ursprünglich nur auf das Gleichgewicht zweier Kräfte angewandt worden war, bei Bernoulli für eine beliebige Anzahl von Kräften verallgemeinert erscheint.

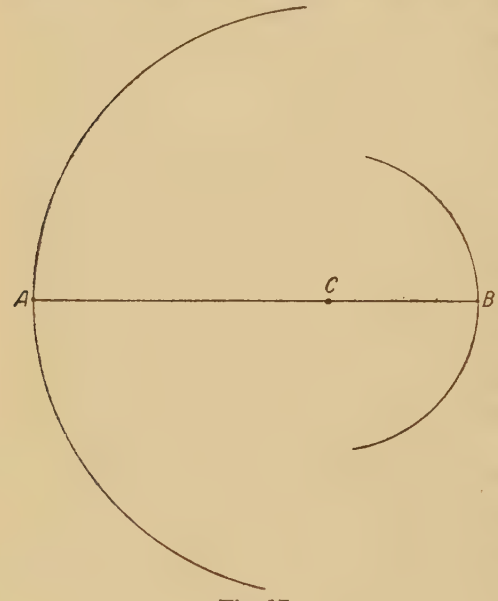

Fig. 17.

Es entsteht für uns also zunächst die Frage, was man unter einer virtuellen Verrückung zu verstehen habe. Als virtuell definiert man solche Verrückungen, die mit der Natur des Systems und die untereinander verträglich sind. Besser als durch abstrakte Erklärungen wird dieser Begriff vielleicht durch folgendes Beispiel klar werden. Es sei (Fig. 17) AB ein im Punkte C befestigter Hebel, bei dem der eine Arm AC doppelt so lang sei wie der andere. Dann sind Verrückungen der Punkte A und B, die mit der Natur des Systems verträglich sind, da die Stange AB starr und der Punkt C unbeweglich sein soll, Bewegungen auf den beiden Kreisen, die man um C als Mittelpunkt mit den Halbmessern CA und CB beschreibt. Damit diese Verrückungen aber nicht nur mit der Natur des Systems, sondern auch untereinander verträglich seien, ist es stets notwendig, daß der von dem Punkte A zurückgelegte Kreisbogen doppelt so lang sei wie derjenige, den der Punkt B beschreibt; und ferner daß die beiden Kreisbogen, die die beiden Angriffspunkte zurücklegen, denselben Umlaufsinn haben, daß also stets, wenn sich der Punkt A abwärts bewegt, der Punkt B in die Höhe steigt und umgekehrt. Es ist aber andererseits auch klar, daß die Bewegungen,

die die Angriffspunkte der Kräfte ausführen, wenn wir von außen her dem System einen Ruck erteilen, also beispielsweise an den absolut starren und im Punkte C befestigten Hebel stoßen, stets virtuelle Verrückungen sein müssen, solche Verrückungen, die mit der Natur des Systems und die untereinander verträglich sind.

Eine gewisse Schwierigkeit bereitet nun freilich der Gedanke, daß wir das Gleichgewicht dadurch kennen lernen wollen, daß wir seine Störungen betrachten, daß wir einen Fall, der ja gerade durch das Verschwinden jeder Bewegung charakterisiert ist, dennoch an Bewegungen studieren wollen. Diese Schwierigkeit verursacht nicht nur den meisten, die zum ersten Male das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten kennen lernen, ein gewisses Unbehagen, sondern sie hat in früheren Jahrhunderten auch öfter hervorragende Physiker zu einer entschiedenen Stellungnahme gegen das Prinzip veranlaßt. So hat namentlich Simon Stevin jede Zurückführung des Hebelgesetzes auf das Geschwindigkeitsprinzip verworfen; denn das, was unbeweglich sei, so meinte er, könne keinen Kreis beschreiben; zwei Gewichte im Gleichgewichte seien aber unbeweglich; folglich beschrieben zwei Gewichte im Gleichgewichte auch keinen Kreis.[1]

Diesem Einwande Stevins gegenüber muß eben darauf hingewiesen werden, daß die in vertikalem Sinne genommenen virtuellen Verrückungen zweier Punkte des Hebels völlig unabhängig von der Größe der angreifenden Kräfte sind, ja überhaupt völlig unabhängig von dem Umstande, ob in den betreffenden Punkten und ob überhaupt an dem System Kräfte angreifen. Um zu entscheiden, ob zwei Gewichte P_1 und P_2, die in den beiden Punkten A und B eines Hebels aufgehängt sind, einander das Gleichgewicht halten, brauchen wir gar nicht den Hebel mit den beiden angehängten Gewichten zu betrachten. Wir können auch die Gewichte abnehmen, nun dem gewichtslosen Hebel eine kleine Drehung erteilen und beobachten, in welchem Verhältnisse die Verschiebung, die jetzt der Punkt B erfährt, zu der Verschiebung steht, die gleichzeitig der Punkt A erleidet. Wir können dieses Verhältnis statt an unserem Hebelbalken natürlich aber auch an einem kongruenten oder ähnlichen Modell aus ganz anderem Material studieren.

Die Feststellung der virtuellen Geschwindigkeiten hat also mit dem Gleichgewichtszustande als solchem gar nichts zu tun; ihre Ermittelung ist ein rein geometrisches Problem. Haben wir durch eine rein geometrische Betrachtung festgestellt, daß das Verhältnis der

---

[1] Stevin, Hypomnemata mathematica (Leyden 1605), vol. IV, Appendix statices, cap. I:

Quiescens nullum describit circulum.
Duo situ aequilibria quiescunt.
Itaque duo situ aequilibria nullum describunt circulum.

beiden virtuellen Verrückungen der Punkte A und B an unserem Hebel etwa γ ist (die Verschiebung des Punktes B sei etwa γmal so groß wie die des Punktes A), so können wir dann auf Grund dieser geometrischen Feststellung mit Hilfe des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten die physikalische Behauptung aufstellen, daß zwei in den Punkten A und B aufgehängte Gewichte P_1 und P_2 nur dann im Gleichgewichte sein können, wenn

$$P_1 = \gamma \cdot P_2.$$

Stimmen im allgemeinen die Richtungen der Verrückungen nicht mit denen der Kräfte überein, so werden wir freilich statt der Verrückungen selbst ihre Projektionen auf die Richtungen der Kräfte nehmen und insofern doch auch die Kräfte in Betracht ziehen müssen. Die Beziehungen, die zwischen den einzelnen dieser Projektionen bestehen,

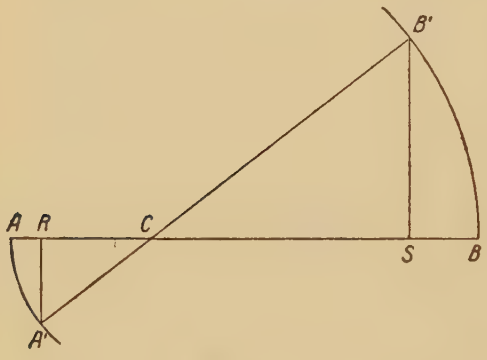

Fig. 18.

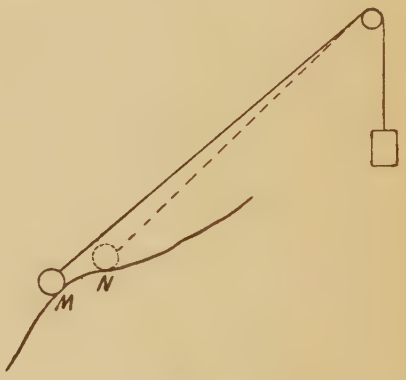

Fig. 19.

werden aber lediglich von der Natur des Systems und von den Richtungen der angreifenden Kräfte abhängen, dagegen ganz unabhängig sein von den absoluten Größen der angreifenden Kräfte und somit auch völlig unabhängig davon, ob die Kräfte einander das Gleichgewicht halten oder nicht.

In besonderen Fällen ist es freilich möglich, daß das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten auch auf endlich große Verrückungen anwendbar ist. Dies ist z. B. bei einer Rolle der Fall, aber auch bei dem Hebel (natürlich nur dann, wenn man von der Veränderlichkeit der Schwere mit der während der Bewegung wechselnden Entfernung vom Erdmittelpunkte absieht). Denn wenn auch die Kreisbogen AA' und BB' (Fig. 18) endlich groß sind, so wird doch stets die Relation erfüllt sein, daß sich die Strecken $A'R$ und $B'S$, die also zugleich die Projektionen der Verschiebungen auf die vertikale Kraftrichtung darstellen, so verhalten wie die Arme, also umgekehrt wie die angreifenden Kräfte.

Dagegen zeigt uns ohne weiteres Fig. 19, daß das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten unmöglich auf eine endliche Verrückung von M bis N angewendet werden darf. Denn wenn dies möglich wäre, so müßte die Last Q ebensowohl im Punkte M wie im Punkte N der Kraft P das Gleichgewicht halten, was aber unmöglich in beiden Lagen der Fall sein kann (auch dann nicht, wenn man die Änderung in der Richtung des zu der Rolle gehenden Seiles und die Senkung des Gewichtes P mit berücksichtigt). Da man also im allgemeinen keineswegs behaupten kann, daß nach einer endlich großen Verrückung ihrer Angriffspunkte die Kräfte noch immer einander das Gleichgewicht halten werden, so ist im allgemeinen das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nur dann anwendbar, wenn man sich, so wie es Johann Bernoulli tat, auf die Betrachtung unendlich kleiner virtueller Verrückungen beschränkt.

Eine wichtige Erweiterung verdankt, wie schon erwähnt, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten aber auch insofern Johann Bernoulli, als dieser das Theorem, das bis dahin nur für das gleichzeitige Wirken zweier Kräfte aufgestellt worden war, auf das Gleichgewicht beliebig vieler Kräfte ausdehnte. Die Berechtigung dieser Verallgemeinerung hat Lagrange[1] folgendermaßen dargelegt. Er betrachtet drei Kräfte, die einander das Gleichgewicht halten, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$. Die Verschiebung, die bei einer beliebigen Verrückung des Systems die Angriffspunkte dieser drei Kräfte erfahren, seien $\delta p'$, $\delta q'$, $\delta r'$; ihre Projektionen auf die Richtungen der drei angreifenden Kräfte seien δp, δq, δr (wobei aber diese Projektionen gemäß der von Johann Bernoulli getroffenen Annahme ein negatives Vorzeichen empfangen, wenn sie der betreffenden Kraft entgegengesetzt sind).

Man kann sich nun nach Lagrange eine der Kräfte, etwa die Kraft $\mathfrak{Q}$, in zwei Komponenten zerlegt denken, die beide die gleiche Richtung haben mögen wie $\mathfrak{Q}$ und deren algebraische Summe der absoluten Größe von $\mathfrak{Q}$ gleich sei. Die eine Komponente $\mathfrak{Q}_1$ sei nun so groß gewählt, daß die Gleichung erfüllt sei

$$P\,\delta p + Q_1\,\delta q = 0. \tag{1}$$

Da nach dem früher Gesagten die virtuelle Verrückung des Angriffspunktes einer Kraft ganz unabhängig ist von deren Größe, so ist also die Projektion der virtuellen Verrückung auf die Kraftrichtung für die Komponenten $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ ebenso groß wie für die ganze Kraft $\mathfrak{Q}$; wir können ohne weiteres also stets statt δq_1 und δq_2 einfach δq schreiben. Da nun die Gültigkeit des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten für zwei Kräfte bereits vorausgesetzt ist, so bedeutet also die in der letzten Gleichung enthaltene Forderung, daß die Komponente $\mathfrak{Q}_1$ der Kraft $\mathfrak{P}$ das Gleichgewicht halten solle. Es muß sich

[1] Mécanique analytique (2. Aufl.), part. I, sect. II, 1.

demnach, da ja die ganze Kraft $\mathfrak{D}$ den Kräften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ das Gleichgewicht halten soll, die andere Komponente $\mathfrak{D}_2$ mit der Kraft $\mathfrak{R}$ im Gleichgewicht befinden. Es muß also die Gleichung erfüllt sein

$$Q_2\,\delta q + R\,\delta r = 0 \tag{2}$$

(weil ja eben $\delta q_2 = \delta q$ ist).

Addieren wir die letzten zwei Gleichungen, so erhalten wir, da ja

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

ist, die Gleichung

$$P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r = 0. \tag{3}$$

Damit ist es also bewiesen, daß das Prinzip, das für das Gleichgewicht zweier Kräfte gilt, auch auf das Gleichgewicht dreier Kräfte ausgedehnt werden kann, und es unterliegt natürlich keiner Schwierigkeit, auf ganz demselben Wege die Richtigkeit des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten auch für vier und überhaupt allgemein für n Kräfte zu erweisen.

Vierte Vorlesung.

Die Gleichgewichtsgleichungen von Lagrange.

In der letzten Vorlesung haben wir die Entwicklung des Prinzipes der virtuellen Geschwindigkeiten bis zu dem Erscheinen der analytischen Mechanik von Lagrange verfolgt. Wir haben gesehen, wie dieses Prinzip, dessen Anfänge bis in die Zeit des Aristoteles zurückreichen und das auch auf das engste mit einem grundlegenden Satze der aristotelischen Dynamik zusammenhängt, aus der Betrachtung des Gleichgewichtes am horizontalen Hebel hervorging; wie dann zuerst im 13. Jahrhundert Jordanus Nemorarius die Notwendigkeit erkannte, bei der Anwendung des Prinzipes auch den möglicherweise vorhandenen Richtungsunterschied zwischen der wirkenden Kraft und der Bewegung zu berücksichtigen; wie das Prinzip, nachdem es schon lange eine große Rolle in der Statik gespielt hatte, aber erst durch Johann Bernoulli eine allgemeinere und präzisere Fassung erhielt, einerseits durch die Schaffung des exakten Begriffes der virtuellen und unendlich kleinen Verrückungen, andererseits durch die Ausdehnung des Prinzipes, das bis dahin nur auf das Gleichgewicht zweier Kräfte Anwendung gefunden hatte, auf das Zusammenwirken beliebig vieler Kräfte.

Wir hatten auch als mathematischen Ausdruck für das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten die in dieser Gestalt uns zuerst bei Lagrange begegnende Formel kennen gelernt

$$P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots = 0. \tag{1}$$

In dieser Formel bedeuten P, Q, R (und die übrigen großen, lateinischen Buchstaben, die wir nicht alle angeschrieben haben) die Kräfte, die an dem System angreifen; δp, δq, δr[1] usw. sind aber die Projektionen der Verschiebungen der Angriffspunkte auf die Richtungen der Kräfte. Die Produkte $P\delta p$, $Q\delta q$, $R\delta r$ usw., die die bei den Ver-

[1] Nach dem Vorschlage von Lagrange (Méc. anal., Part. I, Sect. IV, 10) bezeichnet man mit δp, δq usw. die Wege, die die Angriffspunkte in den Richtungen der Kräfte bei einem beliebigen willkürlichen Rucke erfahren, den man dem System als Ganzen erteilt. Diese Größen sind daher wohl von den eigentlichen Differentialen (für die das Zeichen d gebraucht wird) zu unterscheiden; sie werden von Lagrange als Variationen bezeichnet, da sie in einer „inneren und notwendigen Verbindung“

schiebungen geleisteten Arbeiten darstellen und die Lagrange die virtuellen Momente nennt (Johann Bernoulli hatte sie als „Energien" bezeichnet), sind hierbei positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem, ob die Projektionen der virtuellen Verschiebungen die gleiche oder aber die entgegengesetzte Richtung haben wie die Kräfte.

Diese Gleichung (1), die also stets erfüllt sein muß, wenn sich das System, an dem die Kräfte angreifen, im Gleichgewichte befinden soll, bildet nun den Ausgangspunkt für alle weiteren Untersuchungen von Lagrange; sie ist die Grundformel, auf der Lagrange auf streng analytischem Wege das Gebäude der Mechanik errichtete.

„Ich habe mir vorgenommen" — so sagt Lagrange in dem Vorworte zu seinem berühmten Werke — „die Theorie der Mechanik und die Kunst, die darauf sich beziehenden Probleme zu lösen, auf allgemeine Formeln zurückzuführen, deren einfache Entwicklung alle für die Lösung jedes Problems notwendigen Gleichungen angibt. Man wird in diesem Werke" — so fährt er fort — „keine geometrischen Figuren finden. Die Methoden, die ich auseinandersetze, erfordern weder Konstruktionen noch geometrische oder mechanische Betrachtungen, sondern nur algebraische, einem regelmäßigen und gleichförmigen Gange unterworfene Operationen. Mein Ziel ist", sagt Lagrange, „die Mechanik zu einem neuen Zweig der Analysis zu gestalten."

Lagrange geht also von dem Bestreben aus, den eigentlich physikalischen Teil der Mechanik auf ein Minimum zu reduzieren. Mit der Gewinnung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten ist er eigentlich schon beendet; denn der weitere Weg ist dann ein rein analytischer. Lagrange hat sich aber nicht damit begnügt, eine universelle Formel aufzustellen, die alle anderen Gesetze der Mechanik bereits in sich schließt; er hat auch eine universelle einheitliche Methode geschaffen, durch die man nach einem stets gleich bleibenden Verfahren von der allgemeinen Formel zu der Lösung der mannigfachsten Spezialprobleme gelangen kann. Die einzige Arbeit, die bei der Behandlung mechanischer Aufgaben noch zu verrichten bleibt und die einiges Nachdenken erfordert, besteht dann nur mehr in dem Einsetzen der durch die Besonderheit des betrachteten Falles gegebenen Spezialwerte in eine allgemeine Formel, in der Übersetzung der gegebenen Besonderheiten des Systems in die Sprache der Analysis. Der weitere Weg der Rechnung bleibt aber stets der gleiche; und der wissenschaftliche Arbeiter, der die Methoden der Analysis ebenso beherrscht wie ein geübter Stenotypist seine Schreibmaschine, ist also durch die geistige Arbeit, die bei der Ent-

mit der von Lagrange erfundenen Variationsrechnung stehen (von der in der 19. Vorlesung noch die Rede sein wird und in der ebenfalls das Zeichen δ gebraucht wird). Das Rechnen mit den Größen δp usw. ist sehr einfach, da nach einem fundamentalen Satze der Variationsrechnung dieselben Formeln, die die gewöhnlichen Differentiale geben, auch die Variationen geben, wenn man nur in den Formeln statt des Zeichens d das Zeichen δ einsetzt.

wicklung dieser universellen Methode ein für allemal Lagrange für sich und alle anderen entwickelt hat, eigentlich jeder weiteren tieferen Gedankenarbeit für immer enthoben.

Um nun das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zum Ausgangspunkte rein mathematischer Betrachtungen machen zu können, wird es jedenfalls empfehlenswert sein, dem Prinzipe zunächst eine Gestalt zu geben, die die unmittelbare Anwendung des wertvollsten Hilfsmittels der mathematischen Physik, die die Anwendung der analytischen Geometrie gestattet.

Wir wollen uns also mit Lagrange die angreifenden Kräfte in Komponenten nach drei festen Koordinatenachsen zerlegt denken und wollen dann vor allem sehen, wie sich die in der Gleichgewichtsgleichung vorkommenden Größen δp, δq, δr usw. (die also die virtuellen Verschiebungen der Angriffspunkte in den Richtungen der Kräfte angeben) durch die Koordinaten der Angriffspunkte ausdrücken lassen, deren Funktionen sie ja gewiß sind.

Wir betrachten zunächst das Wegelement $\delta \mathfrak{s}_1$, dessen Projektion auf die Richtung der ersten Kraft eben gleich δp sei, und zerlegen dieses Wegelement in drei Komponenten nach den Koordinatenachsen, die wir mit δx_1, δy_1, δz_1 bezeichnen wollen. Nach einem elementaren Satze der Geometrie muß dann also die Projektion von $\delta \mathfrak{s}_1$ auf die Richtung der Kraft P, also die Größe δp gleich sein der Summe der auf die Richtung der Kraft P bezogenen Projektionen von δx_1, δy_1 und δz_1. Nun sind aber die Winkel, die die Wegkomponenten δx_1, δy_1 und δz_1 mit der Kraft P bilden, gleich den Winkeln, die die Kraft P mit den drei Koordinatenachsen bildet und die wir mit α_1, β_1, γ_1 bezeichnen wollen; es ist also die Projektion von δx_1 auf die Richtung der Kraft gleich $\delta x_1 \cdot \cos \alpha_1$; die Projektion von δy_1 auf die Richtung der Kraft P ist gleich $\delta y_1 \cdot \cos \beta_1$; die Projektion von δz_1 ist gleich $\delta z_1 \cdot \cos \gamma_1$. Folglich ist δp als die Summe dieser drei Projektionen gleich

$$\delta p = \delta x_1 \cdot \cos \alpha_1 + \delta y_1 \cdot \cos \beta_1 + \delta z_1 \cdot \cos \gamma_1. \tag{2}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung noch mit P und berücksichtigen wir, daß ja $P \cos \alpha_1$ die Projektion der Kraft P auf die x-Richtung ist, also ihre Komponente X_1, ebenso $P \cos \beta_1$ gleich ist der Komponente Y_1 und $P \cos \gamma_1$ gleich der Komponente Z_1, so erhalten wir

$$P \delta p = X_1 \cdot \delta x_1 + Y_1 \cdot \delta y_1 + Z_1 \cdot \delta z_1. \tag{3}$$

Setzen wir diesen Wert für $P \delta p$ und analoge Werte für die übrigen virtuellen Momente in die Gleichgewichtsgleichung (1) ein, so nimmt diese also die Gestalt an

$$\sum_{h=1}^{h=n} (X_h \cdot \delta x_h + Y_h \cdot \delta y_h + Z_h \cdot \delta z_h) = 0. \tag{4}$$

Um den Sinn dieser Gleichung besser zu verstehen, wollen wir zunächst (auch wenn wir dabei nichts Neues erfahren werden) den besonderen Fall ins Auge fassen, daß die sämtlichen n Punkte, in denen die Kräfte angreifen, vollkommen frei seien, d. h. daß zwischen ihnen keinerlei Verbindungen bestünden, daß aber auch die einzelnen Punkte für sich im Raume nach allen Richtungen völlig frei beweglich seien; dann kann man jeden der Punkte verrücken, ohne daß die übrigen Punkte eine Verrückung dabei zu erfahren brauchen. Man kann aber auch bei jedem einzelnen Punkte (wofern er nur nach allen Richtungen im Raume frei beweglich ist) den Wert einer einzigen, etwa der y-Koordinate, vergrößern oder verkleinern, ohne daß sich dabei die Werte der x- oder der z-Koordinate desselben Punktes ändern; man braucht dazu nur diesem einen Punkte einen Ruck parallel zur y-Achse zu erteilen. Man kann also, wenn die Punkte völlig frei sind, jede der $3n$ Koordinaten, die die ganze Lage des Systems bestimmen, unabhängig von all den übrigen Koordinaten variieren.

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und somit auch die Gleichung (4) müssen aber nun für jeden beliebigen Ruck gelten, den wir dem System geben. Wir können dem System nach dem früher Gesagten nun etwa eine derartige Bewegung erteilen, daß lediglich der erste Punkt eine Verschiebung erfährt und zwar genau parallel zur x-Achse. Dann würde von den Variationen der $3n$ Koordinaten lediglich δx_1 von Null verschieden sein, während

$$\delta y_1 = \delta z_1 = 0$$

wäre und ebenso für alle Werte von h von 2 bis n

$$\delta x_h = \delta y_h = \delta z_h = 0.$$

Setzen wir diese Resultate in die Gleichung (4) ein, und betrachten wir einstweilen die virtuellen Momente der Kraftkomponenten mit Ausnahme von X_1, so erkennen wir ohne weiteres, daß alle diese Momente einzeln für sich verschwinden müssen. Da aber nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten die Summe aller $3n$ virtuellen Momente gleich null sein muß, so muß auch das virtuelle Moment der Kraftkomponente X_1 verschwinden. Da aber δx_1 von 0 verschieden ist, ist dies nur dann möglich, wenn X_1 selbst gleich null ist.

Indem wir nun dem System der Reihe nach insgesamt $3n$ verschiedene Rucke erteilen, deren jeder immer nur eine der $3n$ Koordinaten des Systems verändert, der erste Ruck verändere x_1, der zweite x_2, der n^{te} x_n, der $(n+1)^{te}$ y_1, der $(n+2)^{te}$ y_2, der $2n^{te}$ y_n, der $(2n+1)^{te}$ z_1, der $3n^{te}$ z_n, — indem wir derart also dem System der Reihe nach $3n$ verschiedene Rucke erteilen, werden wir der Reihe nach für alle $3n$ Kraftkomponenten feststellen können, daß sie null sein müssen, wenn das System der n völlig freien Punkte im Gleichgewichte sein soll.

An sich hat es nun freilich keinen Sinn, auf einen solchen Fall das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten anzuwenden; denn in einem solchen Fall reduziert es sich eben auf den einfachen bekannten Satz, daß ein freier Punkt nur dann im Gleichgewichte sein kann, wenn in ihm gar keine Kraft angreift (oder was dasselbe ist, wenn in ihm mehrere Kräfte angreifen, deren Resultierende aber verschwindet).

Auf so einfache Fälle das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten anzuwenden, hätte aber ebenso wenig Sinn, wie wenn man planimetrische Probleme mit Formeln der Stereometrie lösen wollte. Eine eigentliche Bedeutung gewinnt also das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten erst dann, wenn die n Punkte, die wir betrachtet haben, nicht mehr durchwegs frei beweglich sind, sondern in ihren Bewegungen gewissen Bedingungen unterworfen sind; wenn beispielsweise einer der Punkte mit einem anderen so verbunden ist, daß jede Verrückung des einen Punktes notwendigerweise eine irgendwie beschaffene Verrückung des zweiten Punktes zur Folge haben muß, oder wenn auch nur ein einzelner Punkt nicht mehr im Raume frei beweglich ist, sondern gezwungen ist, in einer bestimmten Fläche oder in einer bestimmten Kurve oder stets in gleicher Entfernung von einem gegebenen Zentrum zu bleiben.

Jede derartige Einschränkung der Bewegungsfreiheit der n Punkte läßt sich aber analytisch durch eine oder durch mehrere Gleichungen ausdrücken, die irgend welche unter den $3n$ Koordinaten des Systems zueinander in eine Beziehung bringen. Ist beispielsweise der i^{te} Punkt gezwungen, stets in der gleichen Entfernung l von einem festen Punkte zu bleiben, in den wir uns den Koordinatenursprung verlegt denken, so wird zwischen den drei Koordinaten x_i, y_i und z_i die Gleichung bestehen

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - l^2 = 0.$$

Wäre dies die einzige Bedingung, so wären natürlich von den $3n$ Koordinaten des Systems nur mehr $3n-1$ unabhängig variabel. Denn durch die Werte von zwei Koordinaten des i^{ten} Punktes ist dann auch bereits auf Grund der letzten Gleichung der Wert der dritten Koordinate dieses Punktes festgelegt. — Wären zwei Punkte, etwa der h^{te} und der k^{te}, miteinander starr verbunden, so daß sie stets die gleiche Entfernung d voneinander beibehalten müßten, so wäre diese Bedingung analytisch durch die Gleichung darstellbar

$$(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2 - d^2 = 0.$$

Sind uns derart zwischen den Koordinaten des Systems m Bedingungsgleichungen gegeben, so werden wir natürlich nur mehr $3n-m$ Koordinaten als unabhängig variabel ansehen können. Indem wir die m Bedingungsgleichungen differentiieren, muß es uns dann möglich sein, in der Gleichgewichtsgleichung (4) die Änderungen von m Koordinaten durch die Änderungen der übrigen Koordinaten auszudrücken.

Das Polynom, das wir derart erhalten, hätten wir nach den Variationen der übriggebliebenen $3n-m$, voneinander also unabhängigen Koordinaten zu ordnen. Die Ausdrücke, mit denen diese Variationen multipliziert erscheinen, hätten wir dann einzeln Null zu setzen; und derart gewinnen wir schließlich $3n-m$ die Kräfte enthaltende Gleichgewichtsgleichungen (nicht mehr $3n$ wie in dem Falle, daß sämtliche Punkte völlig frei sind).

Wenn nun auch diese Methode immer zum Ziele führen muß, so ist es doch, wie Lagrange erkennt, keineswegs notwendig, daß wir die unabhängigen Variabeln unter den verschiedenen x_h, y_h, z_h ($h=1$ bis n) auswählen. Wir können als unabhängige Variable beliebige Größen wählen und zwar nicht nur Längen, sondern auch Winkel, Flächen und Volumina, also ganz beliebige „generalisierte Koordinaten", als deren Funktionen sich die $3n$ orthogonalen Koordinaten darstellen lassen; und hierdurch kann die Behandlung der Probleme oft eine außerordentliche Vereinfachung erfahren.

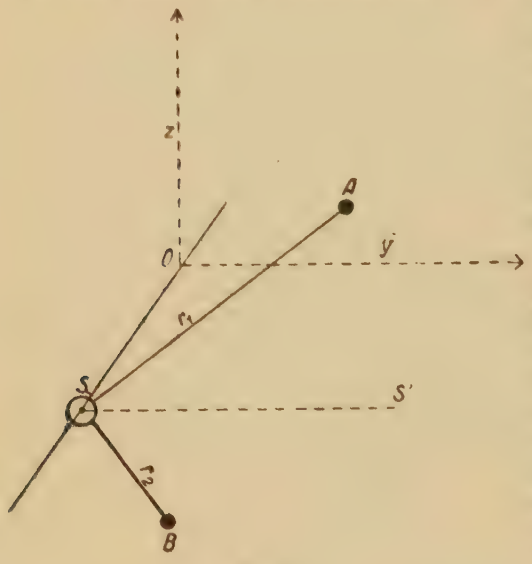

Fig. 20.

Wir denken uns z. B. einen völlig starren Winkelhebel (Fig. 20), in dessen Endpunkten zwei beliebige Kräfte angreifen mögen und dessen beide ungleich lange Arme einen unveränderlichen Winkel, beispielsweise von 90°, miteinander bilden. Der Scheitel S des Winkels bilde zugleich den Mittelpunkt eines kleinen Ringes, der ohne Reibung auf einem zylindrischen Stabe gleiten könne, der auf der Ebene des Winkelhebels senkrecht stehe und horizontal sei. Man erkennt dann ohne weiteres, daß das System nur zwei unabhängige Variable, daß es, wie man auch sagt, nur zwei Freiheitsgrade besitzen kann, da sich nämlich einerseits der Hebel nur um die zylindrische Stange drehen, andererseits nur längs ihrer verschieben kann.

In der Tat entsprechen ja den beiden Endpunkten des Hebels A und B sechs Koordinaten, zwischen denen aber vier Bedingungsgleichungen bestehen müssen; die eine drückt die Unveränderlichkeit der Strecke SA aus, die zweite die Unveränderlichkeit der Strecke SB, die dritte die Unveränderlichkeit der Strecke AB; die vierte schließlich sagt aus, daß die Ebene des Winkelhebels stets auf dem Stabe normal sein muß.

Denken wir uns z. B., daß die zylindrische Stange die x-Achse darstelle und die y, z-Ebene also der Ebene des Winkelhebels parallel sei, so würde die vierte Bedingungsgleichung ausdrücken, daß die x-Koordinate für die Punkte A und B stets den gleichen Wert haben müsse.

Es ist aber einfacher, die vier Bedingungsgleichungen erst gar nicht aufzustellen, sondern von Anfang an nur zwei unabhängige Variable in die Betrachtung einzuführen; und als solche wird man zweckmäßig die Entfernung des Scheitels des Winkelhebels von einem festen Punkte O auf dem zylindrischen Stabe wählen (wir wollen diese Entfernung η nennen) und dann den Winkel, den der eine der beiden Hebelarme, etwa der längere SA, mit der Horizontalen, genauer gesagt mit der Strecke SS' bildet; dieser Winkel sei φ. Es wird also in diesem Falle die eine unabhängige Variable eine Länge, die andere ein Winkel sein.

Es sei nun im allgemeinen der Zustand irgend eines Systems durch eine bestimmte Anzahl unabhängiger Variablen bestimmt, die wir mit ξ, ψ, χ usw. bezeichnen wollen und die Längen, Winkel, Flächen oder Volumina darstellen mögen. Die Aufgabe, die sich Lagrange stellt, ist nun, für dieses System die Gleichgewichtsbedingungen in der Form von Gleichungen zu gewinnen, in denen außer den für das System charakteristischen Konstanten lediglich die Kräfte und die unabhängigen Variablen vorkommen.

Lagrange betrachtet hierzu zunächst die Größen δp, δq, δr usw., die in der allgemeinen Gleichgewichtsgleichung (1) vorkommen. Er denkt sich hierzu[1] auf den Geraden, die die Kräfte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R} \ldots$ darstellen, irgendwo feste Punkte gewählt, deren unveränderliche Koordinaten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 usw. seien; die Entfernungen der verrückbaren Angriffspunkte von diesen festen Punkten wären dann die veränderlichen Strecken p, q, r usw.; es ist also

$$p = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 + (z_1 - c_1)^2}. \tag{5}$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$\delta p = \frac{x_1 - a_1}{p}\,\delta x_1 + \frac{y_1 - b_1}{p}\,\delta y_1 + \frac{z_1 - c_1}{p}\,\delta z_1. \tag{6}$$

Diese Gleichung ist natürlich identisch mit der Formel

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial x_1}\,\delta x_1 + \frac{\partial p}{\partial y_1}\,\delta y_1 + \frac{\partial p}{\partial z_1}\,\delta z_1.^2 \tag{7}$$

Diese Gleichung hätten wir selbstverständlich auch sofort anschreiben können; denn sie folgt ohne weiteres aus den Sätzen der Differential-

[1] Mécanique analytique (2. Auflage), part. I, sect. II, 4.

[2] Diese Formel stimmt natürlich vollkommen mit der Formel (2) überein, da eben

$$\cos \alpha_1 = \frac{\partial p}{\partial x}$$

usw.

rechnung, wenn die veränderliche Länge von p durch die Lage des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{P}$ festgelegt ist, ja man kann diese Gleichung geradezu als analytischen Ausdruck für diese Tatsache auffassen. Nun ist aber die Lage des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{P}$ ebensowohl wie durch seine drei rechtwinkligen Koordinaten festgelegt, wenn wir die Werte aller unabhängigen Variablen des ganzen Systems kennen; denn ist durch diese Variablen die Lage des ganzen Systems festgelegt, so muß damit natürlich auch die Lage des einzelnen Punktes bestimmt sein. Da Analoges auch für die Angriffspunkte der übrigen Kräfte gilt, da also die Längen aller der veränderlichen Strecken $p, q, r \ldots$ durch die Werte der unabhängigen Variablen vollständig bestimmt sind, so können wir auf Grund der Sätze über die Differentiation von Funktionen von mehreren voneinander unabhängigen Veränderlichen ohne weiteres die Gleichungen aufstellen:

$$(8)\quad \begin{cases} \delta p = \frac{\partial p}{\partial \xi}\cdot\delta\xi + \frac{\partial p}{\partial \psi}\cdot\delta\psi + \frac{\partial p}{\partial \chi}\cdot\delta\chi + \ldots, \\ \delta q = \frac{\partial q}{\partial \xi}\cdot\delta\xi + \frac{\partial q}{\partial \psi}\cdot\delta\psi + \frac{\partial q}{\partial \chi}\cdot\delta\chi + \ldots, \\ \delta r = \frac{\partial r}{\partial \xi}\cdot\delta\xi + \frac{\partial r}{\partial \psi}\cdot\delta\psi + \frac{\partial r}{\partial \chi}\cdot\delta\chi + \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Solche Gleichungen erhalten wir ebenso viele, wie Angriffspunkte der Kräfte vorhanden sind; jede Gleichung hat aber wieder so viele Summanden, wie unabhängige Variable vorhanden sind. Die in den Gleichungen auftretenden partiellen Differentialquotienten werden in der Regel ziemlich einfache Funktionen der unabhängigen Variablen sein. Wir multiplizieren nun die erste Gleichung mit P, die zweite mit Q, die dritte mit R usw. und addieren dann alle, aber derart, daß wir zunächst die erste Vertikalkolumne addieren, dann die zweite und so fort. Die linke Seite muß nun nach dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten gleich Null sein. Folglich muß auch die rechte Seite die Summe Null ergeben. Da aber die Größen $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\chi$ usw. voneinander völlig unabhängig sind, so muß der gesamte Ausdruck, mit dem $\delta\xi$ in der Summe multipliziert erscheint, für sich verschwinden, ebenso aber auch der gesamte Ausdruck, mit dem $\delta\psi$ multipliziert erscheint usw. Es müssen also die Gleichungen bestehen

$$(9)\quad \begin{cases} P\frac{\partial p}{\partial \xi} + Q\frac{\partial q}{\partial \xi} + R\frac{\partial r}{\partial \xi} + \ldots = 0, \\ P\frac{\partial p}{\partial \psi} + Q\frac{\partial q}{\partial \psi} + R\frac{\partial r}{\partial \psi} + \ldots = 0, \\ P\frac{\partial p}{\partial \chi} + Q\frac{\partial q}{\partial \chi} + R\frac{\partial r}{\partial \chi} + \ldots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Mit der Aufstellung dieser Gleichungen[1] erscheint unser Problem gelöst; denn wir haben für das Gleichgewicht ebensoviele Bedingungen festgestellt, als das System unabhängige Variable hat. Sind uns also die angreifenden Kräfte (nach Größe und Richtung) gegeben, so können wir stets die Lage des Systems berechnen, in der die Kräfte einander das Gleichgewicht halten; denn ebenso groß wie die Zahl der unabhängigen Variablen ist die Zahl der Gleichungen, die uns zu ihrer Berechnung zur Verfügung stehen.

Die umgekehrte Aufgabe, bei gegebener Lage die Kräfte zu berechnen, ist natürlich unbestimmt. Denn damit die n Kräfte nach Größe und Richtung gegeben seien, müssen wir von ihnen $3n$ Komponenten kennen; die Zahl der unabhängigen Variablen und somit auch der Gleichgewichtsbedingungen ist aber, wofern das System nicht völlig frei ist (welchen Fall wir ja von unserer Betrachtung ausschließen), stets kleiner als $3n$. Es müssen uns also von vornherein soviele Kraftkomponenten bereits gegeben sein, als die Zahl der unabhängigen Variablen kleiner ist als $3n$; es müssen uns somit von vornherein soviele Kraftkomponenten gegeben sein, als Bedingungen zwischen den Koordinaten des Systems bestehen. Dann können wir auf Grund unserer Gleichgewichtsgleichungen (9) berechnen, wie groß die übrigen Kraftkomponenten sein müssen, damit sie mit den bereits vorhandenen bei der gegebenen Lage des Systems Gleichgewicht ergeben.

Um das Wesen der Lagrangeschen Methode an einem einfachen Beispiele zu erläutern, wollen wir uns schließlich die Aufgabe stellen, für den von uns früher betrachteten Winkelhebel mit zwei Freiheitsgraden die Gleichgewichtsgleichungen aufzustellen, wobei wir als unabhängige Variable die bereits definierten Größen η und φ ansehen. Der längere Hebelarm SA habe die Länge r_1, der kürzere die Länge r_2. In den Punkten A und B mögen die irgendwie beschaffenen Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ angreifen. Wir können uns dann eine virtuelle Verrückung des Punktes A stets aus zwei zueinander senkrechten Komponenten zusammengesetzt denken: einer Verschiebung in der Richtung des Stabes von der Größe $\delta\eta$ und einer Verschiebung normal zur Richtung von SA von der Größe $r_1 \cdot \delta\varphi$ (in der Richtung des wachsenden φ). Die Projektion der ersten Komponente auf die Richtung der Kraft $\mathfrak{P}$ ist $\delta\eta \cdot \cos(\mathfrak{P}, \eta)$; die Projektion der zweiten $r_1 \cdot \delta\varphi \cdot \sin(\mathfrak{P}, \mathfrak{r}_1) \cdot \cos\omega_1$, wenn die Kraft $\mathfrak{P}$ mit der Ebene des Winkelhebels den Winkel ω_1 bildet.

Dann ist also

$$\delta p = \delta\eta \cdot \cos(\mathfrak{P}, \eta) + r_1 \cdot \delta\varphi \cdot \sin(\mathfrak{P}, \mathfrak{r}_1) \cdot \cos\omega_1$$

und ebenso ist

$$\delta q = \delta\eta \cdot \cos(\mathfrak{Q}, \eta) + r_2 \cdot \delta\varphi \cdot \sin(\mathfrak{Q}, \mathfrak{r}_2) \cdot \cos\omega_2.$$

[1] Méc. anal. (2. Auflage), part. I, sect. II, 13.

Die Gleichgewichtsgleichungen des Winkelhebels lauten also auf Grund der Formeln (9)

$$(11)\qquad \begin{cases} P\cdot\cos(\mathfrak{P},\eta)+Q\cdot\cos(\mathfrak{Q},\eta)=0, \\ P\cos\omega_1\cdot r_1\cdot\sin(\mathfrak{P},\mathfrak{r}_1)+Q\cos\omega_2\cdot r_2\cdot\sin(\mathfrak{Q},\mathfrak{r}_2)=0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sagen aber nichts anderes aus, als daß die Komponenten der beiden Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in der Richtung des Stabes einander entgegengesetzt gleich sein müssen und daß ferner auch die Drehmomente der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ um den Stab einander gegenseitig aufheben müssen. (Denn $r_1\cdot\sin(\mathfrak{P},\mathfrak{r}_1)$ ist ja nichts anderes als das Lot, das man von dem Punkte S auf die in die Ebene des Winkelhebels fallende Komponente der Kraft $\mathfrak{P}$ fällt.)

Die erste Gleichung gibt die Bedingung dafür an, daß sich der Winkelhebel nicht längs der zylindrischen Stange verschiebe, die zweite Gleichung die Bedingung dafür, daß er sich nicht um diese Stange drehe.

Daß wir in unsere Betrachtung die unabhängigen Variablen η und φ einführten, hat zwar die Rechnung ziemlich vereinfacht, war aber keineswegs unbedingt notwendig. Wir hätten auch von den vier Bedingungsgleichungen ausgehen können, die zwischen den Koordinaten der Punkte A und B bestehen; diese Gleichungen lauten, wie man sofort aus Fig. 20 erkennt:

$$(12)\qquad \begin{cases} x_1=x_2, \\ y_1^2+z_1^2=r_1^2, \\ y_2^2+z_2^2=r_2^2, \\ (y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=r_1^2+r_2^2. \end{cases}$$

Andererseits muß sein

$$(13)\qquad X_1\,\delta x_1+Y_1\,\delta y_1+Z_1\,\delta z_1+X_2\,\delta x_2+Y_2\,\delta y_2+Z_2\,\delta z_2=0.$$

Indem wir die vier Gleichungen (12) differentiieren, wird es uns möglich, in der Gleichung (13) einerseits δx_2 durch δx_1 und andererseits die drei Variationen δy_2, δz_1, δz_2 durch δy_1 auszudrücken. Indem wir dann x_1 und y_1 als die unabhängigen Variablen ansehen, können wir ebenso verfahren wie früher und müssen natürlich auch zu denselben Gleichgewichtsgleichungen (11) gelangen.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß Lagrange außer der in dieser Vorlesung dargelegten Methode noch eine andere ähnliche, in mancher Hinsicht praktischere Methode zur allgemeinen Lösung statischer und überhaupt mechanischer Probleme erfunden hat. Es ist dies die sogenannte Methode der unbestimmten Multiplikatoren. Da diese Methode, wenn sie auch Lagrange in dem statischen Teile seines großen Werkes bringt, doch jedenfalls aus dem dynamischen Problem der unfreien Bewegung hervorgegangen ist, so möge sie im Zusammenhange mit diesem Probleme erst in einer späteren Vorlesung dargelegt werden.

Fünfte Vorlesung.

Die Begründung der Dynamik durch Galilei.

Viel später erst als die Statik hat sich die Dynamik zu einem exakten Wissenszweige auszugestalten begonnen. Während die Statik schon im Altertum ein fruchtbares Arbeitsgebiet der mathematischen Physiker darstellte, sind in der Dynamik die Griechen über vorwiegend naturphilosophische Spekulationen kaum hinausgekommen, woran vor allem wohl ihre scharfe Unterscheidung zwischen natürlichen und erzwungenen Bewegungen die Schuld trug.[1]

Befindet sich ein Körper an irgend einer Stelle des Raumes, so kann er wohl, wie die Beobachtung zeigt, Bewegungen nach allen von der betreffenden Stelle ausgehenden Richtungen ausführen. Unter diesen Richtungen ist aber nun, wie die Griechen meinten und wie insbesondere Aristoteles lehrte, stets eine einzige vor allen anderen dadurch ausgezeichnet, daß in ihr eine Bewegung ohne einen Aufwand an Kraft möglich sein soll. Eine Bewegung, die in dieser für jeden Körper durch seine Natur festgelegten Richtung erfolgt, heißt daher bei Aristoteles eine natürliche Bewegung, jede andersartige aber eine erzwungene oder gewaltsame. Nach Aristoteles erfolgt die natürliche Bewegung stets auf einer Geraden, die durch den Aufenthaltsort des Körpers und durch den Mittelpunkt der Erde (der zugleich den der Welt darstellt) hindurchgeht — und zwar, je nachdem, ob der Körper „schwer" oder „leicht" ist, zu dem Mittelpunkte hin oder von ihm weg. Daß die natürliche Bewegung mit wachsender Geschwindigkeit erfolgt, war den Alten wohl bekannt; sie waren aber, da die ganze antike Dynamik einen vorwiegend philosophischen Charakter hatte, weniger bestrebt, das exakte Gesetz der Beschleunigung zu ermitteln, als vielmehr eine Ursache der Beschleunigung zu ergründen.

Die Einteilung der Bewegungen in natürliche und erzwungene hatte zur Folge, daß der Kraftbegriff in der antiken Physik eine viel geringere Bedeutung erlangte, als in der modernen. Denn da die natürliche Bewegung als eine kräftefreie angesehen wurde, blieben Untersuchungen über die Beziehungen der Kraft zu den anderen Bewegungsgrößen ganz

---

[1] Vgl. A. E. Haas, Die Grundlagen der antiken Dynamik; Arch. f. Gesch. d. Naturw. u. d. Technik 1, 1908, S. 19—47.

auf das Gebiet der erzwungenen Bewegung beschränkt, die durch bestimmte Gesetze zu beschreiben zuerst Aristoteles versuchte. Seine Gesetze sind von unseren heutigen völlig dadurch unterschieden, daß in ihnen statt der Geschwindigkeitsänderung die Geschwindigkeit selbst auftritt. Denn die ganze Dynamik der erzwungenen Bewegungen beruhte auf der Auffassung, daß eine Kraft nicht nur zur Erzeugung, sondern auch zur Erhaltung einer gewaltsamen Bewegung notwendig sei. Eine ähnliche Rolle wie in der heutigen Physik das zweite Newtonsche Bewegungsaxiom spielt darum in der aristotelischen Dynamik ein Satz, den man etwa in der Form aussprechen könnte, daß die „gewaltsame" Geschwindigkeit, die einer Masse eine Kraft erteilt, der Kraft direkt und der Masse indirekt proportional sei.[1]

Neben der scharfen Unterscheidung von natürlichen und erzwungenen Bewegungen kannte die antike Physik noch eine andere Zweiteilung der Bewegungen, die für die weitere Entwicklung der Dynamik ebenfalls sehr verhängnisvoll wurde. Die ganze antike Naturanschauung beruhte auf der Annahme eines tiefgehenden Gegensatzes zwischen dem vollkommenen und unveränderlichen Himmel und der unvollkommenen und steten Veränderungen unterworfenen Erde; dieser Gegensatz soll aber nicht nur in stofflicher Hinsicht (durch die Verschiedenheit des Äthers von den irdischen Stoffen), sondern auch in mechanischer zur Geltung kommen; denn nach der antiken, am schärfsten eben durch Aristoteles ausgebildeten Auffassung ist die geradlinige Bewegung für das Vergängliche, die kreisförmige dagegen für das Unvergängliche charakteristisch; und so erscheint im völligen Gegensatz zu der modernen, durch das Beharrungsgesetz bedingten Anschauung im Altertum gerade die mit konstanter Geschwindigkeit erfolgende Kreisbewegung und nicht etwa die geradlinige, gleichförmige als der Idealtypus einer Bewegung.[2]

Die naturwissenschaftlichen Anschauungen des Aristoteles beherrschten bekanntlich völlig die Physik im Zeitalter der Scholastik und der Renaissance. Doch seit der Zeit Lionardos da Vinci häuften sich immer mehr physikalische Erkenntnisse, die in direktem Widerspruch zu der aristotelischen Dynamik stehen; insbesondere zu zwei Thesen, die notwendige Folgerungen der aristotelischen Prinzipien darstellten und die doch einer experimentellen Prüfung unmöglich standhalten konnten. Es waren die beiden Thesen, daß ein Körper um so rascher falle, je schwerer er sei[3] und daß bei jeder Bewegung die Geschwindigkeit umgekehrt proportional sei dem Widerstande des Mittels, in dem die Bewegung erfolgt und infolgedessen direkt

[1] Aristoteles, Physik VII, c. 5.

[2] Vgl. A. E. Haas, Ästhetische und teleologische Gesichtspunkte in der antiken Physik; Arch. f. Gesch. d. Philos. 22, 1908, S. 80—113.

[3] Aristoteles, Physik IV, c. 8; auch Herons Mechanik (ed. Nix), S. 176.

proportional der freilich nicht exakt definierbaren „Feinheit" des Mittels.[1]

Gegen die erste dieser Thesen wandte sich schon der Venezianer Benedetti und mit aller Entschiedenheit dann sein jüngerer Zeitgenosse Galilei, der die Lehre von der Proportionalität zwischen Fallgeschwindigkeit und Gewicht direkt experimentell durch seine berühmten Versuche am schiefen Turme in Pisa widerlegte, aus welchen Versuchen deutlich hervorging, daß (wenn man von Bewegungshindernissen absieht) alle Körper, von welchem Gewichte immer, gleich schnell fallen. Aber auch theoretisch hat Galilei die Unmöglichkeit der aristotelischen These durch die Absurdität der Folgerungen erwiesen, die sich aus ihr ableiten lassen. Denn ist ein schwereres Gewicht mit einem leichteren verbunden, so ist es, wie Galilei meint, ganz klar, daß die große Masse den Fall der kleineren beschleunigen, hingegen die kleinere den Fall der größeren verzögern muß. Andererseits müßten aber wieder beide zusammen, da sie ja in ihrer Verbindung ein größeres Gewicht darstellen als einzeln, rascher fallen, als wenn sie nicht verbunden sind.

Die vernichtenden Angriffe, die Galilei gegen die aristotelische Physik richtete, blieben nicht auf das Problem des freien Falles beschränkt; sie erstreckten sich auch auf andere mechanische Probleme, wie namentlich das des Schwimmens der Körper und vor allem auch auf die grundlegenden Fragen der Astronomie. Bestand so das Lebenswerk Galileis auf der einen Seite darin, daß er Lehren stürzte, die durch fast zwei Jahrtausende die Physik beherrscht und in ihr jeden wahren Fortschritt unmöglich gemacht hatten, so gebührt ihm auf der anderen Seite das noch größere Verdienst, daß er auch für den Bau, der an der Stelle des zertrümmerten aristotelischen Lehrgebäudes nun rasch zu stolzer Höhe gedeihen sollte, die eigentlichen Grundlagen schuf.

Galilei tat dies in seinem berühmten Werke, das den Titel trug: „Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend"[2] und das wenige Jahre vor Galileis Tode 1638 erschien. Der bedeutendste Abschnitt des Werkes, das in sechs „Tage" zerfällt, umfaßt den dritten und vierten Tag und wird von Galilei mit den treffenden Worten eingeleitet, daß er über einen uralten Gegenstand eine ganz neue Wissenschaft bringen wolle;[3] der uralte Gegenstand aber ist die Bewegung der Körper unter dem Einflusse der Schwere.

---

[1] Aristoteles, Physik IV, c. 8.

[2] Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, attenenti alla meccanica ed ai movimenti locali. Deutsch in Ostwalds Klassikern Nr. 11, 24, 25; übersetzt von Arthur von Oettingen.

[3] Discorsi, 3. Tag, Anfang: De subiecto vetustissimo novissimam promovemus scientiam.

Gewissermaßen als Einleitung hierzu bringt Galilei zunächst die Theorie der gleichförmigen (geradlinigen) Bewegung, die er als solche definiert, bei der die in irgend welchen Zeiten vom Körper zurückgelegten Strecken untereinander gleich sind. Für eine derartige Bewegung stellt Galilei eine Reihe von Sätzen auf, deren Inhalt sich durch die bekannte Formel darstellen läßt

$$v = \frac{s}{t}.^{1}$$

Nachdem derart Galilei die gleichförmige, geradlinige Bewegung behandelt hat, geht er dann dazu über, die Gesetze der Fallbewegung zu ermitteln, in der er mit Recht eine beschleunigte Bewegung von dem denkbar einfachsten Typus vermutet, so daß man geradezu die Definition der gleichförmig beschleunigten Bewegung zusammenfallen lassen könne mit derjenigen der natürlich beschleunigten.

Denn „zur Untersuchung der natürlich beschleunigten Bewegung hat uns", so meint Galilei, „gleichsam mit der Hand geleitet die aufmerksame Beobachtung des gewöhnlichen Geschehens und der Ordnung der Natur in allen ihren Verrichtungen, bei deren Ausführung sie die allerersten, einfachsten und leichtesten Hilfsmittel zu verwenden pflegt. Wenn ich" — so fährt Galilei fort — „daher bemerke, daß ein aus der Ruhelage von bedeutender Höhe herabfallender Stein nach und nach neue Zuwüchse an Geschwindigkeit erlangt, warum sollte ich nicht glauben, daß solche Zuwüchse in allereinfachster, jedermann plausibler Weise zustande kommen? Wenn wir aber genauer aufmerken, werden wir keinen Zuwachs einfacher finden als denjenigen, der in immer gleicher Weise hinzutritt."[2]

Galilei stellt sich also zunächst die Aufgabe, eine Bewegung als gleichförmig beschleunigte zu definieren, bei der die Zuwüchse an Geschwindigkeit in immer gleicher Weise hinzutreten. Ist eine derartige Definition probeweise gemacht, so sind die Gesetze der derart definierten Bewegung auf deduktivem Wege abzuleiten; und dann ist schließlich nach Galileis Programm experimentell zu untersuchen, ob diese Gesetze bei den in der Natur vorkommenden beschleunigten Bewegungen erfüllt sind. Ist dies der Fall, so ist damit erwiesen, daß die probeweise als gleichförmig beschleunigt definierte Bewegung identisch ist mit der natürlich beschleunigten. In der Tat erwies sich die Hoffnung Galileis als berechtigt, auf diesem Wege der Kombination von Gedankenexperiment, deduktiver Forschung und physikalischem Versuche zu der Erkenntnis der Gesetze der „natürlich beschleunigten" Bewegung zu gelangen.

---

[1] Die üblichen Bezeichnungen erklären sich aus den Anfangsbuchstaben der Worte velocitas, spatium, tempus.

[2] Übersetzung von A. v. Oettingen.

Die Definition der gleichförmig beschleunigten Bewegung mußte nach dem eben Gesagten Galilei jedenfalls so treffen, daß die Geschwindigkeitszuwüchse gleichmäßig erfolgen, und die beiden einfachsten Annahmen, die man da machen kann, sind jedenfalls die, daß entweder die Geschwindigkeit proportional mit dem zurückgelegten Wege, oder proportional mit der seit Beginn der Bewegung verflossenen Zeit wächst. Der erste Ansatz, den Galilei machte, war in der Tat, wie er selbst erzählt, der, daß die Geschwindigkeit proportional sei dem zurückgelegten Wege; aber infolge eines merkwürdigen Trugschlusses, der in diesem Falle der Wissenschaft sehr zum Heile gereichte, glaubte Galilei, diese Annahme von vornherein als in sich widerspruchsvoll verwerfen zu müssen. Galilei vermochte nämlich noch nicht völlig genau zwischen momentaner Geschwindigkeit und Durchschnittsgeschwindigkeit zu unterscheiden; er meinte daher, daß, wenn tatsächlich die Geschwindigkeit bei doppeltem Wege doppelt so groß sei wie bei einfachem, dann doch der doppelte Weg AC in derselben Zeit zurückgelegt werden müßte wie der einfache Weg AB; wenn dies aber der Fall sei, dann müßte die Strecke BC in der Zeit Null zurückgelegt werden, was aber unmöglich sei.

Infolge dieses merkwürdigen Trugschlusses verfolgte also Galilei den ersten Ansatz überhaupt nicht weiter und ging zu dem zweiten, nun zunächst liegenden über, dem zufolge die Geschwindigkeit gleichmäßig mit der Zeit wächst; der Ansatz, den nun Galilei machte, läßt sich also, wenn man den konstanten Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit mit g bezeichnet, durch die Formel ausdrücken

$$v = g \cdot t. \tag{1}$$

Da Galilei an diesem Ansatz keinen inneren Widerspruch entdeckte, so suchte er aus ihm nun weitere Gesetze zu deduzieren, und da ja der Begriff der Geschwindigkeit aus den Begriffen des Weges und der Zeit abgeleitet ist, so entstand also natürlich vor allem die Frage, in welcher Beziehung bei einer durch den Ansatz (1) definierten Bewegung der Weg zu der Zeit steht. Diese Frage konnte Galilei auf Grund eines schönen, von ihm aufgefundenen Satzes beantworten, der es gestattet, das Problem der durch den Ansatz (1) als gleichförmig beschleunigt definierten Bewegung auf das Problem der gleichförmigen Bewegung zurückzuführen.

Dieser Satz lehrt nämlich, daß die Zeit, in der irgend eine Strecke von einem Körper von der Ruhelage aus in gleichförmig beschleunigter Bewegung zurückgelegt wird, ebenso groß ist wie die Zeit, in der dieselbe Strecke der Körper zurücklegen würde, wenn er sich gleichförmig mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegte, die halb so groß ist wie die bei der beschleunigten Bewegung erlangte Endgeschwindigkeit.[1]

[1] Dritter Tag, Theor. 1, Prop. 1.

Die Richtigkeit dieses Satzes beweist Galilei an der Hand einer Figur (Fig. 21), bei der er gewissermaßen als Abszisse die Zeit und als Ordinate die Geschwindigkeit aufträgt, die in jedem Augenblicke der bewegte Körper hat. Für die gleichförmig beschleunigte Bewegung erhält man derart ein Dreieck, hingegen ein Rechteck für die fingierte Bewegung, die gleichförmig mit einer konstanten Geschwindigkeit zurückgelegt wird, die halb so groß ist wie die Endgeschwindigkeit der beschleunigten Bewegung. Dreieck und Rechteck sind aber, wie man ohne weiteres erkennt, flächengleich. Errichtet man also auf der Basis in gleichen Abständen eine bestimmte Anzahl von Ordinaten, die uns Geschwindigkeiten darstellen, so zeigt der Anblick der Figur, daß, wie Galilei meint, die Summe aller Geschwindigkeitswerte bei beiden Bewegungen die gleiche ist; daß also, was bei der beschleunigten Bewegung in der ersten Hälfte der Zeit an Geschwindigkeit (gegenüber der gleichförmigen Bewegung) versäumt wird, in der zweiten Hälfte der Zeit nachgeholt wird. (Exakter müßte man sagen, daß durch den Flächeninhalt der Figur in beiden Fällen der zurückgelegte Weg dargestellt wird; und daß somit aus dem Umstande, daß beide Figuren die gleiche Fläche und die gleiche Basis haben, folgt, daß bei beiden Bewegungen in der gleichen Zeit insgesamt gleiche Wege zurückgelegt werden.)

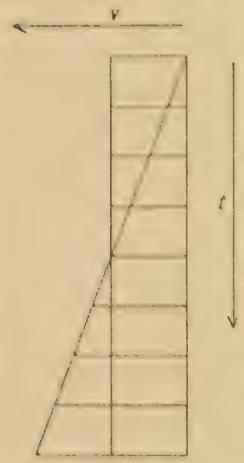

Fig. 21.

Betrachten wir also eine beliebige Strecke s, die in gleichförmig beschleunigter Bewegung in der Zeit t zurückgelegt wird (wobei zu Beginn der Zeit der Körper seine Bewegung beginne und an ihrem Ende eben nach der Definition die Geschwindigkeit $g.t$ habe) — so wird nach dem zuletzt besprochenen Satze die Strecke s auch in der gleichen Zeit t bei einer gleichförmigen Bewegung zurückgelegt, die mit der konstanten Geschwindigkeit $\frac{1}{2} gt$ erfolgt. Da aber bei einer gleichförmigen Bewegung der Weg gleich ist dem Produkte aus der konstanten Geschwindigkeit und der Zeit, so muß für die gleichförmige und infolgedessen auch für die gleichförmig beschleunigte Bewegung die Beziehung gelten

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Es müssen sich, wenn sich ein Körper von der Ruhelage aus gleichförmig beschleunigt bewegt, die in gewissen Zeiten zurückgelegten Strecken so verhalten wie die Quadrate der Zeiten.[1]

Galilei suchte sich nun auf dem Wege des Experimentes davon zu vergewissern, ob bei den in der Natur vorkommenden beschleu-

[1] Dritter Tag, Theor. 2, Prop. 2.

nigten Bewegungen tatsächlich diese Beziehung erfüllt sei, ob also die von ihm probeweise als gleichförmig beschleunigte Bewegung identisch sei mit der natürlich beschleunigten. Galilei konnte nun jedenfalls zeigen, daß die Proportionalität zwischen Weg und Zeitquadrat bei einer Fallbewegung längs einer schiefen Ebene besteht.

Galilei benutzte bei seinen Versuchen, wie er selbst erzählt, ein Brett von zwölf Ellen (etwa 8 m Länge), das auf der nach oben gekehrten Schmalseite mit einer Rinne versehen war, die zur Verminderung der Reibung mit sehr glattem Pergament gefüttert war; in dieser Rinne ließ Galilei eine sehr harte, völlig runde und glatt polierte Messingkugel laufen; das Brett wurde dabei auf der einen Seite ein oder zwei Ellen hoch gehoben. Galilei maß nun die Zeit, die bei einem bestimmten Neigungswinkel die Kugel zum Durchlaufen der ganzen Fallrinne brauchte und verglich diese Zeit mit der Zeit, in der die Kugel von dem höchsten Punkte aus bestimmte Bruchteile der Strecke ($^1/_4$, $^2/_3$, $^3/_4$ usw.) zurücklegte. Die Zeit wurde hierbei durch Abwägung der Wassermenge gemessen, die in der betreffenden Zeit aus einem mit einer kleinen Bodenöffnung versehenen Eimer floß. Bei „wohl hundertfacher Wiederholung", so meint Galilei, fand er, daß sich stets die Strecken wie die Quadrate der Zeiten verhielten, und zwar fand er dieses Gesetz bei jeder beliebigen Neigung der Fallrinne erfüllt.

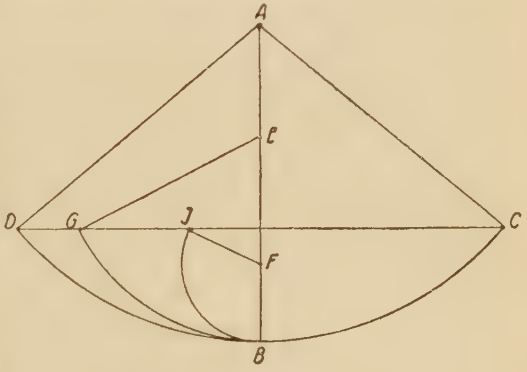

Fig. 22.

Schon dieser Umstand berechtigte wohl Galilei zu dem Schlusse, daß die Proportionalität zwischen Weg und Zeitquadrat auch bei dem freien vertikalen Falle bestehen müsse; aber eine noch viel wertvollere Stütze fand dieser Schluß durch ein wichtiges Theorem, das Galilei ableitete und das sich auf ein Experiment stützte, aus dem, so einfach es auch war, dennoch Galilei die bedeutungsvollsten physikalischen Erkenntnisse gewann. Dieses Experiment beschreibt Galilei folgendermaßen.

In einer vertikalen Wand sei bei A (Fig. 22) ein Nagel eingeschlagen, an dem eine an einem dünnen Faden AB befestigte schwere Kugel hänge. Auf der Wand denken wir uns eine horizontale Linie CD gezeichnet. Bringt man nun die Kugel nach C und läßt sie los, so sieht man, daß sie den Bogen CBD beschreibt; sie bleibt nur ein ganz kleines Stück infolge des Luftwiderstandes und der Reibung unter dem Niveau CD zurück, so daß man eben schließen muß, daß sie bei einem Fehlen von

Bewegungshindernissen dieses Niveau genau erreichen würde. „Wir können also", so meint Galilei, „schließen, daß die Geschwindigkeit, die die Kugel durch das Hinabfallen durch den Bogen CB erlangt, genüge, um die Aufwärtsbewegung durch den gleich großen Bogen BD bis zu der gleichen Höhe zu bewirken."

Da im übrigen aber die Bogen DB und CB einander völlig gleich und symmetrisch sind, so kann man, wie Galilei meint, auch behaupten, daß, welche Geschwindigkeit auch immer bei irgend einer Abwärtsbewegung ein Körper erlangt, diese Geschwindigkeit stets den Körper befähige, dieselbe Bewegung im umgekehrten Sinne wieder bis zu dem Ausgangspunkte der Bewegung zurückzulegen.[1]

Nachdem man also auf experimentellem Wege diese wichtige Erkenntnis gewonnen hat, setzt man nach Galilei den Versuch folgendermaßen fort. Man schlägt in der Wand bei E oder F einen Nagel ein, der den Faden, wenn er aus der Lage AC kommt, aufhält. Man bemerkt dann, daß die Kugel sich wiederum bis zu der horizontalen Linie CD bewegt, wobei sie entweder den Bogen BG oder den Bogen BJ beschreibt. (Wird der Nagel so tief eingeschlagen, daß er näher zu B als zu dem Schnittpunkt von AB und CD liegt, so umschlingt der Faden den Nagel.)

Da aber nun nach dem früher Gesagten die Geschwindigkeiten, die die Kugel zum Aufsteigen durch die Bogen BD, BG, BJ befähigen, ebenso groß sind wie die Geschwindigkeiten, die die Kugel bei einer Abwärtsbewegung durch diese Bogen erlangt, so erkennt man also, daß die Kugel stets mit der gleichen Geschwindigkeit in B ankommen muß, ganz einerlei, ob sie ihre Abwärtsbewegung in D oder G oder J oder in irgend einem anderen in der horizontalen Linie DC gelegenen Punkte beginnt.

Galilei sieht es nun als selbstverständlich an, daß die Sätze, die für die Bewegung durch die Kreisbogen gelten, auch (falls man von den Bewegungshindernissen absieht) für die Bewegung durch die entsprechenden Sehnen gelten müssen, daß also auch bei einer geradlinigen Bewegung von D nach B oder von G nach B dennoch die Kugel in beiden Fällen mit der gleichen Geschwindigkeit in B ankommen müßte. Galilei gelangt somit zu dem wichtigen Satze, daß die Geschwindigkeit, die ein Körper durch die Abwärtsbewegung auf verschieden geneigten schiefen Ebenen erlangt, dennoch stets dieselbe ist, wofern nur die Höhen dieser Ebenen die gleichen sind.[2]

---

[1] Genau heißt es bei Galilei: adunque anco il momento acquistato nella scesa DB, è eguale à quello, che sospigne l'istesso mobile per il medesimo arco da B in D, si che universalmente ogni momento acquistato per la scesa d'un arco è eguale à quello, che può far risalire l'istesso mobile per il medesimo arco.

[2] Einleitung zum dritten Tag: Accipio gradus velocitatis eiusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisitos tunc esse aequales, cum eorundem planorum elevationes aequales sint.

Aus diesem Theorem kann Galilei sogleich einen anderen wichtigen Satz ableiten. Er denkt sich von dem höchsten Punkte O einer schiefen Ebene (etwa der früher betrachteten Fallrinne) eine vertikale Linie gezogen, in der ein Körper von O als Ruhelage aus frei falle (Fig. 23). Betrachten wir dann zwei nahe bei einander liegende Punkte in der Fallrinne A und B und ziehen durch diese horizontale Linien, so schneiden sie die vertikale in zwei Punkten A' und B'; die Entfernung AB sei Δs, die Entfernung $A'B'$ sei $\Delta s'$. Dann verhält sich

$$\Delta s : \Delta s' = l : h, \tag{2}$$

wenn l die Länge der schiefen Ebene bedeutet und h die Höhe.

Andererseits ist nach dem früheren Theorem die Geschwindigkeit, mit der Δs durchlaufen wird, gleich der Geschwindigkeit, mit der $\Delta s'$ zurückgelegt wird, da man infolge der Kleinheit der betrachteten Wegelemente von der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit absehen kann. Es müssen sich also die Zeiten, in denen Δs und $\Delta s'$ zurückgelegt werden, ebenso verhalten wie die Wegelemente selbst, also wie l zu h. Da diese Beziehung für jedes beliebige der Wegelemente gilt, in die wir uns die Länge der schiefen Ebene zerlegt denken können, so kann Galilei den wichtigen und von ihm durch zahlreiche Experimente bewiesenen Satz aussprechen, daß sich die Fallzeit längs einer schiefen Ebene zu der Fallzeit durch ihre Höhe ebenso verhält, wie die Länge der schiefen Ebenen zu ihrer Höhe.[1]

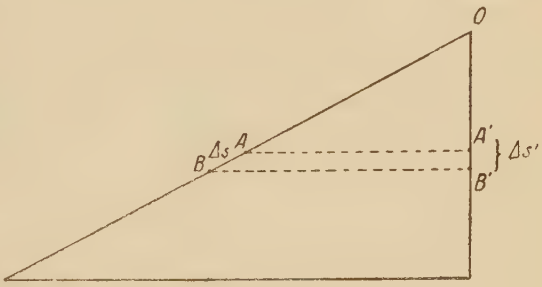

Fig. 23.

Auf Grund dieses Satzes ergibt sich aber ohne weiteres, daß die Proportionalität zwischen Momentangeschwindigkeit und Zeit, die, wie die Versuche an der Fallrinne beweisen, bei der Bewegung auf der schiefen Ebene besteht, auch bei dem freien Falle erfüllt ist. Denn besteht die Proportionalität bei der Bewegung auf der schiefen Ebene, so können wir die Geschwindigkeit v, mit der das Element der schiefen Ebene Δs durchlaufen wird, gleich setzen

$$v = \gamma \cdot t,$$

wobei γ eben die Beschleunigung auf der schiefen Ebene bedeutet. Ebensogroß ist aber nach dem früher erwähnten Galileischen Theorem die Geschwindigkeit v', mit der bei dem freien Falle das Wegelement $\Delta s'$ durch-

[1] Dritter Tag, Theor. 3, Prop. 3.

fallen wird. Andererseits ist aber die Zeit, die der Körper beim freien Falle braucht, um von O bis A' zu gelangen, gleich

$$t' = t \cdot \frac{h}{l}.$$

Es ist also

$$v' = \gamma \cdot \frac{h}{l} t.$$

Die Proportionalität zwischen Momentangeschwindigkeit und Zeit besteht also wie bei der schiefen Ebene (für die sie experimentell bewiesen ist) auch bei dem freien Falle, und zwar verhält sich die Beschleunigung auf der schiefen Ebene zu der des freien Falles wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Mit der Auffindung der richtigen Fallgesetze sind die genialen Leistungen Galileis auf dem Gebiete der Dynamik keineswegs erschöpft; Galilei hat außer den bereits erwähnten noch eine Reihe anderer wichtiger Sätze über die Bewegung auf der schiefen Ebene, einige auch über die Pendelbewegung aufgestellt und ist für die weitere Entwicklung der Dynamik vor allem aber durch seine ausgezeichneten Untersuchungen über die Wurfbewegung von großem Einflusse geworden, weil er bei ihnen zuerst in richtiger Weise das Prinzip des Bewegungsparallelogrammes verwertete.

Wenn wir uns aber nun fragen, worin denn eigentlich die völlig neue Auffassung Galileis besteht, der er so großartige Forschungsergebnisse verdankte und die ihn zum eigentlichen Begründer einer exakten Dynamik machte, dann müssen wir diese Frage am ehesten wohl dahin beantworten, daß Galilei den Begriff des **idealen**, als von Bewegungshindernissen freien dynamischen Prozesses schuf und für die ideale Bewegung das Prinzip der **Umkehrbarkeit** aufstellte.

Auf Grund dieses neuen Begriffes und dieses neuen Prinzipes ergab sich dann als selbstverständliche Folgerung ein Satz, den Galilei gelegentlich auffand, ohne ihm jedoch eine übermäßige Beachtung zu schenken und dessen außerordentliche Tragweite eigentlich erst spätere Forscher erkannt haben.[1] Diesen Satz spricht Galilei im dritten Tage der „Discorsi" in der Form aus, daß der „Geschwindigkeitsgrad", der sich in einem bewegten Gegenstande finde, in ihm seiner ganzen Natur nach unzerstörbar „eingeprägt" sei, wofern äußere Ursachen, die eine Beschleunigung oder Verzögerung hervorrufen könnten, ferngehalten werden. Da dies aber nur auf der horizontalen Ebene der Fall sei, so folge, daß die Bewegung in der Horizontalen „ewig" sei.[2]

[1] Vgl. Emil Wohlwill, Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes; Zeitschr. f. Völkerpsychologie **14**, 1884, S. 365—410; **15**, S. 70—135; 337—387.

[2] Dritter Tag, Scholium zu Probl. 9, Prop. 23: Attendere insuper licet, quod velocitatis gradus, quicunque in mobili reperiatur, est in illo suapte natura indele-

Dieses wichtige Resultat ergibt sich bei Galilei ohne weiteres auf Grund der Vorstellung der idealen Bewegung und des Reversibilitätsprinzipes. Aus dem Begriffe des idealen dynamischen Prozesses folgt ja auf Grund der früher besprochenen Sätze über die schiefe Ebene, daß jede von Bewegungshindernissen freie Abwärtsbewegung, auch wenn sie unter einem noch so kleinen Neigungswinkel erfolgt, beschleunigt sein müßte; aus dem Prinzipe der Umkehrbarkeit folgt wiederum, daß jede ideale Bewegung, die in der einen Richtung mit einer Beschleunigung verbunden ist, in der entgegengesetzten Richtung mit einer gleich großen Verzögerung verknüpft sein muß; es muß also jede ideale Aufwärtsbewegung, auch wenn sie unter einem noch so kleinen Neigungswinkel erfolgt, verzögert sein.

Aus der Vereinigung der beiden Tatsachen ergibt sich aber ohne weiteres der Satz, daß bei der idealen horizontalen Bewegung weder eine Beschleunigung noch eine Verzögerung möglich sein kann, daß sie sich also ewig gleichförmig erhalten müsse. Diesem Satze hat Galilei (worauf schon in einer früheren Vorlesung[1] hingewiesen wurde) dann eine noch allgemeinere Fassung gelegentlich seiner Untersuchungen über die Wurfbewegung gegeben, indem er hierbei das Prinzip aufstellte, daß auch dann, wenn der gleichförmig bewegte Körper die horizontale Ebene verlasse und infolgedessen nunmehr dem Einflusse der Schwere unterliege, dennoch die frühere Bewegung gleichförmig und unzerstörbar als die eine Komponente der tatsächlichen Bewegung fortbestehen müsse.[2]

---

biliter impressus, dum externae causae accelerationis aut retardationis tollantur, quod in solo horizontali plano contingit. ... Ex quo pariter sequitur motum in horizontali esse quoque aeternum.

[1] 2. Vorlesung.

[2] Discorsi, 4. Tag, im Beginne: Mobile quoddam super planum horizontale proiectum mente concipio omni secluso impedimento; iam constat ex his quae fusius alibi dicta sunt illius motum aequabilem et perpetuum super ipso plano futurum esse, si planum in infinitum extendatur: si vero terminatum et in sublimi positum intelligamus, mobile, quod gravitate praeditum concipio, ad plani terminum delatum, ulterius progrediens, aequabili atque indelebili priori lationi superaddet illam, quam a propria gravitate habet deorsum propensionem, indeque motus quidam emerget compositus ex aequabili horizontali et ex deorsum naturaliter accelerato, quem proiectionem voco.

Sechste Vorlesung.

Die Bewegungsaxiome.

Die fundamentale Bedeutung, die in der Geschichte der Mechanik den Forschungsergebnissen Galileis zukommt, erklärt sich, wie wir in der letzten Vorlesung sahen, daraus, daß Galilei zuerst klar zwischen den wesentlichen Eigenschaften der Bewegung und ihren zufälligen Begleiterscheinungen unterschied und dadurch, daß er von diesen abstrahierte, zu dem Begriffe der idealen Bewegung gelangte, in deren Erforschung er die wahre Aufgabe der Dynamik erkannte. Indem derart Galilei die Problemstellung der Dynamik von Grund aus veränderte, ist er in der Tat der Schöpfer einer „neuen Wissenschaft" geworden, für die er zugleich ein oberstes Gesetz in dem Prinzipe von der vollständigen Umkehrbarkeit des idealen dynamischen Prozesses aufstellte.

Dieses Prinzip führte, wie wir schon in der letzten Vorlesung sahen, bereits bei Galilei zu der Folgerung, daß eine von Bewegungshindernissen freie und dem Einflusse der Schwere nicht unterliegende Bewegung ewig gleichförmig andauern müßte. Galilei selbst hat, wie erwähnt wurde, diesem von ihm aufgefundenen Gesetze keine besondere Bedeutung beigemessen; der erste, der die volle Tragweite dieses Satzes erfaßte und in ihm ein Fundamentalprinzip der Physik erkannte, war der große Philosoph René Descartes.

Descartes hat es zuerst versucht, bestimmte Grundgesetze der Bewegung zu formulieren, auf die sich, wie er meinte, auf rein deduktiv-mathematischem Wege alle Naturgesetze zurückführen lassen müßten. Solcher Grundgesetze nimmt Descartes insgesamt drei an.

Das erste spricht er in der Form aus, daß jeder einfache und nicht aus Teilen zusammengesetzte Körper, soweit es von ihm abhänge, stets in demselben Zustande beharre und nur unter dem Einflusse äußerer Ursachen Veränderungen erfahren könne. Sei also z. B. ein Teil der Materie quadratisch, so würden wir, so meint Descartes, leicht einsehen, daß er stets quadratisch bleiben müsse, wofern nicht von außen her etwas erfolge, was seine Figur verändere. Wenn er ruhe, so müssen wir annehmen, daß er sich nicht zu bewegen beginnen werde, wenn ihn nicht eine Ursache dazu antreibe. Wir haben aber auch nicht mehr Grund, zu glauben, daß ein bewegter Teil der Materie jemals

von selbst, ohne daß ihn ein anderer Körper hemmte, seine Bewegung einstellen könne. Daher müßten wir schließen, daß etwas Bewegtes, sofern es von ihm abhänge, sich ewig bewege.[1]

In diesem ersten cartesianischen Grundgesetze müssen wir außer der klaren Fassung des Beharrungsprinzipes insbesondere noch die Einführung eines für die weitere Entwicklung der Mechanik ungemein bedeutungsvollen Begriffes beachten; Descartes schränkt seine Betrachtungen ausdrücklich auf Objekte ein, die einfache und nicht zusammengesetzte Teile der Materie darstellen und schafft so den ungemein wichtigen Begriff des materiellen Punktes. Er erkannte, daß sich die Dynamik vor allem die Erforschung der Bewegungsgesetze des materiellen Punktes zur Aufgabe machen muß, da bei seiner Betrachtung weder die räumliche Ausdehnung eines Körpers noch die Kräfte, die infolge der Wechselwirkung seiner Teilchen in seinem Inneren auftreten, den Gang der Untersuchung erschweren.

Das „zweite Naturgesetz" lehrt nach Descartes, daß jeder für sich betrachtete Teil der Materie seine Bewegung stets nur in gerader, nie aber in gekrümmter Linie fortzusetzen strebe.[2]

Das dritte cartesianische Bewegungsgesetz bezieht sich schließlich auf die Art und Weise, wie Körper ihre Bewegung gegenseitig beeinflussen; es lehrt, daß durch eine Wechselwirkung zwischen zwei Körpern nie die (algebraische) Summe ihrer Bewegungsgrößen geändert werden könne, wenn man unter Bewegungsgröße das Produkt aus der Masse und aus der Geschwindigkeit des Körpers versteht.

In diesem Gesetze, das Descartes ganz richtig aussprach, jedoch in falscher Weise auf zwei Hauptfälle des Stoßes spezialisierte[3], erkennen wir eine geniale Erweiterung des Beharrungsgesetzes. Denn wenn die Bewegung eines einzelnen sich selbst überlassenen Körpers ungeändert bleibt, so lag ja jedenfalls der Gedanke nahe, daß auch die Gesamtheit der Bewegung, die in einem abgeschlossenen System von Körpern und daher auch in dem abgeschlossen gedachten Universum vorhanden ist, weder einer Vermehrung noch einer Verminderung fähig sei; aber es war jedenfalls eine schwierige Frage, wie mit diesem

[1] Principia philosophiae (erste Auflage erschienen 1644), II, 37: Harum (sc. legum naturae) prima est unamquamque rem, quatenus est simplex et indivisa, manere quantum in se est in eodem semper statu, nec unquam mutari nisi a causis externis. Ita si pars aliqua materiae sit quadrata, facile nobis persuademus illam perpetuo mansuram esse quadratam, nisi quid aliunde adveniat quod eius figuram mutet; si quiescat, non credimus illam unquam incepturam moveri, nisi ab aliqua causa ad id impellatur; nec ulla maior ratio est si moveatur, cur putemus ipsam unquam sua sponte, et a nullo alio impeditam, motum illum suum esse intermissuram. Atque ideo concludendum est id quod movetur, quantum in se est, semper moveri.

[2] Principia philosophiae II, 39: Altera lex naturae est; unamquamque partem materiae seorsim spectatam, non tendere unquam, ut secundum ullas lineas obliqua pergat moveri, sed tantummodo secundum rectas.

[3] Principia philosophiae II, 40ff.

Postulate die unaufhörlichen mechanischen Veränderungen in Einklang zu bringen wären, die sich unserer Wahrnehmung ja doch stets darbieten. Descartes glückte zuerst eine Lösung dieser Schwierigkeit eben durch die Annahme, daß trotz aller Veränderungen, die die Geschwindigkeiten der einzelnen Körper erfahren, dennoch die gesamte Bewegungsgröße des Universums ihren Wert ewig unverändert beibehält.[1]

Es ist wohl mit Sicherheit anzunehmen (wenn es auch viel zu selten hervorgehoben wird), daß diese drei Naturgesetze des Descartes das direkte Vorbild für die berühmten drei „leges motus" darstellen, auf die Newton in seinen „Mathematischen Prinzipien der Naturlehre" (1687) das ganze System der Mechanik aufbaute.

Der Inhalt der Newtonschen Bewegungsaxiome ist ja allgemein bekannt. Das erste lehrt, daß jeder Körper in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung verharre, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.[2] Während das erste Newtonsche Axiom also eigentlich nur eine Verschmelzung des ersten und zweiten cartesianischen Bewegungsgesetzes darstellt, bringt das zweite Newtonsche Axiom eine von Descartes ganz unabhängige Erkenntnis, indem es lehrt: „Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung der geraden Linie, in der jene Kraft wirkt."[3] Die Änderung der Bewegung wird dabei nach Newton durch die Änderung der Bewegungsquantität gemessen, die ihrerseits wieder, ganz wie bei Descartes, durch das Produkt aus der Masse und Geschwindigkeit dargestellt wird.[4] Newton hebt ausdrücklich hervor, daß die Proportionalität zwischen Kraft und Bewegungsänderung stets besteht, ganz einerlei, ob die Kraft auf einmal oder allmählich, „stoßweise" auftritt.

---

[1] Eine exakte Begründung dieses wichtigen Gesetzes versuchte Descartes nicht. Er leitete es vielmehr aus der Vollkommenheit Gottes ab, die nicht nur in der Unveränderlichkeit der Gottheit selbst, sondern auch in der Konstanz ihrer Wirkungen zum Ausdrucke kommen müsse. Hatte also Gott — so meint Descartes — bei der Erschaffung der Materie auch deren Teilen verschiedenartige Bewegungen erteilt und erhalte er die Materie selbst ungeändert in ihrer Gesamtheit, so sei es eine sehr naheliegende und vernunftgemäße Annahme, daß Gott aus denselben Gründen, aus denen er die Materie schuf, und auf dieselbe Art, auf die er es tat, auch stets dieselbe Menge an Bewegung in ihr erhalte. — Jedenfalls vermissen wir eine hinreichende Begründung dafür, daß die Konstanz des Bewegungszustandes der Materie gerade in der Invarianz des Ausdruckes Σmv zum Ausdrucke kommen müsse.

[2] Lex I: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

[3] Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

[4] Definitio II: Quantitas motus est mensura eiusdem orta ex velocitate et quantitate materiae coniunctim.

Das zweite Newtonsche Bewegungsaxiom erscheint als eine geniale verallgemeinernde Zusammenfassung aus einer Reihe wichtiger Erkenntnisse, die vor Newton schon andere Forscher gewonnen hatten; und wenn auch nicht behauptet werden soll, daß diese Erkenntnisse Newton zu der Aufstellung der zweiten lex motus in der Tat geführt haben, so darf man doch wohl sagen, daß sie ihn dazu führen konnten. Diese Erkenntnisse lassen sich in zwei Gruppen teilen, deren eine sich eben auf die Proporticnalität zwischen der Kraft und der Bewegungsänderung, deren andere sich auf die Richtungsgleichheit zwischen der Kraft und der Beschleunigung bezieht.

Zu der ersten Gruppe von Erkenntnissen gehören die grundlegenden Entdeckungen Galileis: daß erstens alle Körper, die sich unter dem Einflusse einer konstanten Kraft im freien Falle oder auf einer schiefen Ebene bewegen, in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeitszuwüchse erfahren; daß zweitens alle Körper gleich schnell fallen, daß aber auch auf einer unter bestimmtem Winkel geneigten schiefen Ebene die Beschleunigung unabhängig ist von der Masse und der Beschaffenheit des Körpers; daß schließlich drittens bei der Bewegung auf der schiefen Ebene, bei der nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm die Bewegung nicht unter dem Einflusse des ganzen Gewichtes P erfolgt, sondern unter dem Einflusse einer Kraft $P \cdot h/l$, auch die Beschleunigung nicht so groß ist wie die Beschleunigung des freien Falles, sondern sich zu dieser ebenfalls so verhält, wie die Höhe (h) der schiefen Ebene zu ihrer Länge (l).[1]

Diese Erkenntnisse Galileis reichen aber in der Tat vollständig aus, um aus ihnen mittels einer höchst einfachen Überlegung sogleich das Gesetz der Proportionalität zwischen der Kraft und der Änderung der Bewegungsgröße zu erhalten. Wir brauchen dazu nur eine Masse m_1 auf einer schiefen Ebene zu betrachten, bei der das Verhältnis der Höhe zur Länge den Wert α_1 habe; die wirksame Kraft sei in diesem Falle P_1, die Beschleunigung b_1. Andererseits betrachten wir eine Masse m_2 auf einer zweiten schiefen Ebene, bei der das Verhältnis der Höhe zur Länge den Wert α_2 habe; die wirksame Kraft sei hierbei P_2, die Beschleunigung b_2. Zur Vereinfachung unserer Überlegung denken wir uns überdies noch eine schiefe Ebene mit dem Verhältnisse α_1 und auf ihr eine Masse m_2; die in diesem Falle wirksame Kraft nennen wir P' und die hierbei auftretende Beschleunigung b' (Fig. 24).

Vergleichen wir nun die dritte Figur mit der ersten, so ergibt sich aus der zweiten Galileischen Erkenntnis, daß

$$b' = b_1 \tag{1}$$

sein muß. Ferner besteht, da die wirksamen Kräfte in diesem Falle gleich

[1] Vgl. Vorles. 15.

sind den Gewichten, multipliziert mit a_1, die Gewichte sich aber offenbar verhalten wie die Massen, die Proportion

$$P' : P_1 = m_2 : m_1, \tag{2}$$

wofür wir auch schreiben können

$$P' = \frac{P_1 \cdot m_2}{m_1}. \tag{3}$$

Andererseits liefert ein Vergleich der dritten Figur mit der zweiten auf Grund der dritten Galileischen Erkenntnis die Beziehung

$$b' : b_2 = a_1 : a_2. \tag{4}$$

Da P' gleich ist dem Gewichte der Masse m_2, multipliziert mit a_1, und

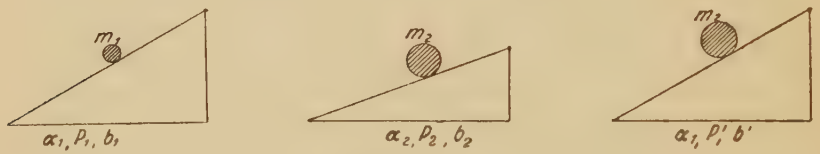

Fig. 24.

P_2 gleich ist dem Gewichte derselben Masse m_2, multipliziert mit a_2, so besteht weiter aber auch die Proportion

$$P' : P_2 = a_1 : a_2. \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt somit

$$P' : b' = P_2 : b_2. \tag{6}$$

Setzen wir aber nun für P' und b' ihre Werte aus den Gleichungen (1) und (3) ein, so erhalten wir die Proportion

$$P_1 : m_1 b_1 = P_2 : m_2 b_2, \tag{7}$$

womit also aus den Galileischen Forschungsergebnissen das Gesetz der Proportionalität zwischen der Kraft und der Änderung der Bewegungsgröße abgeleitet erscheint.

Daß andererseits die Änderung der Bewegung stets in der geraden Linie erfolgen muß, in der die Kraft wirkt, das folgt eigentlich ohne weiteres aus der sehr alten und, wie wir sahen, schon von Hero, Jordanus Nemorarius und vielen anderen gelegentlich ihrer statischen Untersuchungen verwerteten Erkenntnis, daß eine Kraft in einer zu ihr senkrechten Richtung keinerlei Wirkungen auszuüben vermag. Diese Erkenntnis braucht man nur mit dem Prinzipe des Bewegungsparallelogrammes zu kombinieren, um den Satz von der Richtungs-

gleichheit zwischen der Kraft und der Beschleunigung zu erhalten. Denn welcher Art auch immer eine Bewegung ist, die in einem Zeitelemente zurückgelegt wird, so kann man sie doch stets nach dem Prinzipe des Bewegungsparallelogrammes in zwei Partialbewegungen zerlegen, deren eine in der Richtung der Kraft und deren andere senkrecht zu ihr erfolgt. Da in der zur Kraft normalen Partialbewegung die Kraft keinerlei Veränderungen hervorzurufen vermag, so ist es klar, daß die Geschwindigkeitsänderung, die die Kraft bei der in ihre Richtung fallenden Partialbewegung hervorruft, zugleich die gesamte Wirkung darstellt, die in dem betrachteten Zeitelemente von der Karft auf den bewegten Körper überhaupt ausgeübt wird.

Newton bedurfte also, wie wir sehen, eigentlich keiner neuen Erfahrungstatsachen, um zu seinem zweiten Bewegungsaxiome zu gelangen; es ließ sich durch verhältnismäßig einfache Schlüsse aus bereits bekannten Prinzipien gewinnen. Dies war aber nur dadurch möglich, daß Newton wohl als erster — und darin besteht sicher eine seiner größten Leistungen — in wirklich klarer Weise zwischen zwei Begriffen zu unterscheiden wußte, die bis zu seiner Zeit nur allzu häufig miteinander vermengt worden waren, zwischen den Begriffen des Gewichtes und der Masse. Die klare Unterscheidung zwischen Gewicht und Masse mußte aber dann notwendigerweise wiederum zu einer viel allgemeineren, dennoch aber präziseren Fassung des physikalischen Kraftbegriffes führen.

Das dritte Newtonsche Bewegungsgesetz gibt schließlich die Möglichkeit, die Resultate, die sich auf Grund des zweiten Gesetzes für die Dynamik eines einzelnen Massenpunktes gewinnen lassen, auf die Dynamik beliebig vieler Massenpunkte auszudehnen. Die dritte lex motus lehrt nämlich: „Jeder Wirkung ist stets eine Gegenwirkung entgegengesetzt und gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich groß, aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.“[1]

Das dritte Newtonsche Bewegungsgesetz deckt sich eigentlich vollkommen mit dem cartesianischen Prinzipe von der Erhaltung der Bewegungsquantität. Denn unter der Einwirkung eines Körpers auf einen anderen ist ja nach der Newtonschen Definition nichts anderes zu verstehen als die Änderung der Bewegungsgröße, die der eine Körper an dem anderen hervorbringt. Das dritte Newtonsche Bewegungsgesetz sagt also nichts anderes aus, als daß, wenn die Körper A und B aufeinander wirken, die Änderung der Bewegungsgröße, die durch die Einwirkung des Körpers B der Körper A erfährt, gleich groß und entgegengesetzt ist der Änderung der Bewegungsgröße, die durch die Ein-

[1] Lex III: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

wirkung des Körpers A der Körper B erfährt.[1] Hieraus folgt also als andere Fassung des dritten Bewegungsgesetzes, daß durch die gegenseitige Wirkung von Körpern aufeinander die algebraische Summe ihrer Bewegungsgrößen nicht verändert werden kann — ein Satz, den auch Newton selbst in dem dritten „Corollarium"[2] der Einleitung seines großen Werkes, als andere Fassung seines Gegenwirkungsprinzipes aussprach.

---

[1] Das von Newton gewählte und immer wieder gebrachte Beispiel, daß der Stein, den ich mit dem Finger drücke, gleich stark auch meinen Finger drückt, ist eigentlich wenig geeignet, den wahren Sinn des dritten Newtonschen Bewegungsgesetzes darzulegen, zumals es nicht dynamischen, sondern mehr statischen Inhaltes ist.

[2] Corollarium III: Quantitas motus quae colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem et differentiam factorum ad contrariam, non mutatur ab actione corporum inter se.

Siebente Vorlesung.

Die natürlichen Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes.

Das zweite Newtonsche Bewegungsaxiom, das die Proportionalität und Richtungsgleichheit zwischen der wirkenden Kraft und der Beschleunigung — und zwar für jeden Augenblick der Bewegung — lehrt, ermöglicht die Lösung zweier Arten von Aufgaben, denen eine besondere Wichtigkeit unter allen mechanischen Problemen zukommt.

Das zweite Bewegungsaxiom ermöglicht es nämlich einerseits, die Bahn eines materiellen Punktes zu berechnen, wenn die Kraft als eine konstante oder in ihrer Abhängigkeit vom Orte und von der Zeit gegeben ist, und wenn ferner die Lage und die Geschwindigkeit des Massenpunktes zu einer bestimmten Zeit bekannt sind.

Andererseits gestattet das zweite Bewegungsaxiom aber auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe. Man kann mit Hilfe dieses Axioms, falls die von einem Körper in einer bestimmten Zeit durchlaufene Bahn in ihrer Abhängigkeit von der Zeit bekannt ist, für jeden Punkt der Bahn die in ihm wirksame Kraft berechnen und derart häufig aus dem geometrischen Gesetze, das die Form der Bahn erfüllt, auf das physikalische Gesetz schließen, nach dem die bei der Bewegung auftretenden Kräfte wirken.

Um nun die Lösung der beiden erwähnten Aufgaben tatsächlich durchführen zu können, ist es vor allem notwendig, die Beziehung zu kennen, in der bei einer ganz beliebigen Bewegung die Beschleunigung zu Weg und Zeit steht; und da ja der Begriff der Beschleunigung aus dem der Geschwindigkeit abgeleitet ist, so entstand der Physik vor allem die Aufgabe, für eine ganz beliebige Bewegung eine Relation zwischen Geschwindigkeit, Weg und Zeit festzustellen.

Der exakte Begriff der Geschwindigkeit ist aus der Betrachtung der einfachsten überhaupt möglichen, nämlich der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung entstanden. Bei ihr läßt sich die Geschwindigkeit, da man sie als den in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg definiert, ohne weiteres dadurch ermitteln, daß man die Zeit t mißt, in der der bewegte Körper ein Stück der geraden Bahn von der Länge s zurück-

legt. Man findet dann, wie schon Aristoteles lehrte[1], auf Grund ihrer Definition die Geschwindigkeit, indem man die Länge des Bahnstückes durch die zu seiner Zurücklegung erforderliche Zeit dividiert; es ist also

$$v = \frac{s}{t}.$$

Der Wert, den wir derart für die Geschwindigkeit erhalten, ist bei der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung völlig unabhängig davon, wo immer und in welcher Distanz voneinander man die beiden Punkte wählt.

Dies trifft nun bei einer beliebigen Bewegung im allgemeinen gewiß nicht zu, und darum hat es dann auch keinen Sinn, von einer Geschwindigkeit der Bewegung schlechthin zu sprechen. Zunächst einmal sind die Strecken, die der Körper in einer Sekunde durchläuft, in verschiedenen Teilen der Bahn im allgemeinen verschieden groß; wir dürfen also dann nur von einer Momentangeschwindigkeit sprechen, die der Massenpunkt in einem bestimmten Augenblicke, die er an einer bestimmten Stelle der Bahn besitzt. Diese Momentangeschwindigkeit, deren Begriff uns mit einiger Klarheit zuerst bei Galilei begegnet[2], gibt uns also nach Größe und Richtung den Weg an, den der Körper in einer Sekunde in geradliniger, gleichförmiger Bewegung infolge seines Beharrungsvermögens zurücklegen würde, wenn er in dem betreffenden Augenblicke plötzlich dem Einflusse der auf ihn wirkenden Kraft entzogen würde.[3]

Die Frage nach der Richtung der Momentangeschwindigkeit läßt sich sehr leicht beantworten. In dem speziellen Falle einer geradlinigen Bewegung fällt sie natürlich mit der Richtung der Bahn zusammen; bei dem freien Falle z. B. ist die Momentangeschwindigkeit stets vertikal und nach abwärts gerichtet. Ist die Bahn gekrümmt, so behält der Massenpunkt nach dem Beharrungsgesetze im Augenblicke des Aufhörens der Kraft die Richtung bei, die er zuletzt inne hatte. Diese Richtung ist aber gegeben durch eine Gerade, die man zu dem Punkte A, in dem der Einfluß der Kraft plötzlich aufhört, von dem Punkte aus zieht, den der Körper unmittelbar vorher durchlief; diese Gerade ist aber nichts anderes als die Tangente, die man in dem Punkte A an die Bahn legt. Die Momentangeschwindigkeit hat also stets die Richtung der Bahntangente.

Dieses wichtige Prinzip, das sich eigentlich als selbstverständliche Folgerung aus dem Beharrungsgesetze ergibt, hat, nachdem es wahrscheinlich auf Grund primitiver Erfahrungen schon von vielen anderen

---

[1] Vgl. die fünfte Vorlesung.

[2] Daß der Begriff der Momentangeschwindigkeit auch Galilei nicht völlig klar war, beweist der Trugschluß, durch den er die Unmöglichkeit der Annahme darzulegen versuchte, daß die Geschwindigkeit bei dem freien Falle dem zurückgelegten Wege proportional sei (vgl. die fünfte Vorlesung).

[3] Daß man ein derartiges Experiment tatsächlich durchführen kann, beweist ja das Beispiel der Atwoodschen Fallmaschine.

erfaßt worden war[1], mit voller Klarheit zuerst Huygens bei seinen Untersuchungen über die Zentrifugalkraft (von denen später die Rede sein wird) benutzt.

Die vollständige Lösung des Problems der Momentangeschwindigkeit ist sehr bald darauf dann Newton gelungen, und zwar mit Hilfe der von ihm erfundenen Fluxions- oder Differentialrechnung. Dieser neue Kalkül, den bekanntlich gleichzeitig mit Newton, doch unabhängig von ihm, auch Leibniz erfand, dessen sich jedoch zur Lösung bestimmter Aufgaben schon Archimedes[2] und mehrere Mathematiker des 17. Jahrhunderts, wie insbesondere Kepler, Cavalieri und Fermat bedient hatten, ermöglicht es, die Betrachtung einer ganz beliebigen unregelmäßigen Bewegung stets auf die Betrachtung der ideal einfachen, der gleichförmig geradlinigen Bewegung zurückzuführen.

Diese Möglichkeit der Zurückführung des komplizierten auf den einfacheren Fall beruht auf der Erkenntnis, daß wir die Abweichungen, die ein Objekt von dem als ideal einfach erkannten Typus aufweist, vernachlässigen können, wenn wir nur genügend kleine Teile des Objektes in das Auge fassen, und daß die ziemliche Übereinstimmung der beiden Fälle sich um so mehr einer vollkommenen Übereinstimmung nähert, einen je kleineren Teil des komplizierten Objektes wir betrachten.

Für nicht zu große Gebiete können wir uns die Oberfläche der Erde statt kugelförmig eben denken; für nicht allzu große Fallräume können wir davon absehen, daß sich der Wert der Erdbeschleunigung mit der Entfernung von dem Erdmittelpunkte, infolgedessen also während des Falles ändert. Wir sehen die Sekunde für unsere Messungen als konstante Zeiteinheit an, obwohl der Tag, dessen genau fixierten Bruchteil doch die Sekunde bildet, allmählich länger werden muß.

Ebenso können wir, wenn wir die unregelmäßige Bewegung nur durch eine recht kurze Zeit hindurch betrachten, in der der Massenpunkt etwa von dem Punkte A bis zu dem recht nahen Punkte B kommt, von der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit und von der Krümmung der Bahn abstrahieren und uns also mit ziemlicher Annäherung die tatsächlich ungleichförmige, krummlinige Bewegung zwischen den beiden Punkten A und B durch eine fingierte, geradlinige, gleichförmige zwischen ihnen ersetzt denken. Ist die Zeit, die der Massenpunkt braucht, um von A nach B zu gelangen, Δt (d. h. ein nur kleines Zeitintervall) und hat die Sehne zwischen den Punkten A und B die

[1] Z. B. von Benedetti (Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber, 1587).

[2] Daß Archimedes mit den Grundideen der Infinitesimalrechnung vertraut war, geht aus einer Handschrift hervor, die J. L. Heiberg 1906 in Konstantinopel entdeckte und die den Titel führt „Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen". Vgl. Heiberg und Zeuthen, „Eine neue Schrift des Archimedes"; Bibliotheca mathematica (3), 7, S. 321—363.

Länge Δs, so ist also die Geschwindigkeit der fingierten, geradlinigen, gleichförmigen Bewegung, durch die wir uns mit ziemlicher Genauigkeit die tatsächliche, unregelmäßige ersetzt denken können

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Der Wert von $\bar{v}$ wird bei der ungleichförmigen Bewegung hierbei von der Größe von Δt abhängig sein.

Wenn wir nun Δt immer kleiner werden lassen, für jeden Wert das zugehörige $\bar{v}$ berechnen und diese Werte untereinander vergleichen, so werden wir (wenn wir nur Δt hinreichend klein gewählt haben) finden, daß mit abnehmendem Δt auch die Unterschiede zwischen den erhaltenen Werten von $\bar{v}$ immer kleiner werden. In irgend einem besonderen Falle würden wir z. B. die Wahrnehmung machen, daß die Werte von $\bar{v}$ für

$$\Delta t = \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{2000}, \quad \frac{1}{3000} \text{ sec}$$

nur mehr in der vierten Dezimalstelle voneinander abweichen. Betrachten wir dann die Werte für

$$\Delta t = \frac{1}{1{,}000{,}000}, \quad \frac{1}{2{,}000{,}000}, \quad \frac{1}{3{,}000{,}000} \text{ sec},$$

so würden wir vielleicht bei den drei zugehörigen Werten von $\bar{v}$ nur mehr Abweichungen in der achten Dezimalstelle finden, so daß uns diese drei Beobachtungen den Wert der Momentangeschwindigkeit jedenfalls bereits auf sechs Dezimalstellen liefern würden.

Dem richtigen Werte der Momentangeschwindigkeit werden wir uns also um so mehr nähern, je kleiner wir Δt wählen, und wenn wir Δt unendlich klein werden lassen, so würden wir dann ebenso den völlig richtigen Wert der Momentangeschwindigkeit erhalten, wie wir einen völlig richtigen Wert für den Kreisumfang erhalten, wenn wir die Zahl n bei dem regulären n-Ecke, das wir dem Kreise umschreiben oder einschreiben (und dessen Umfang wir angenähert dem Kreisumfange gleichsetzen), unendlich groß werden lassen.

Sind also die beiden Punkte A und B einander unmittelbar benachbart, so kann man den zwischen ihnen liegenden Teil der ungleichförmigen, krummlinigen Bewegung ohne weiteres als geradlinig und gleichförmig ansehen. Es ist demnach die tatsächliche Momentangeschwindigkeit gleich dem Grenzwerte, gleich dem Limes, den der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ für unendlich kleines Δt annimmt. Newton nannte diesen Grenzwert die Fluxion des Weges; wir nennen diesen Grenzwert, den man mit $\frac{ds}{dt}$ bezeichnet, gewöhnlich den Differentialquotienten oder die Ableitung des Weges nach der Zeit. Es gilt also die Formel

$$v = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

Da sich die Richtung der Sehne zwischen zwei Punkten einer Kurve mit abnehmender Distanz der beiden Punkte immer mehr der Richtung der Tangente an das betreffende Kurvenelement nähert, so schließt also das von Newton[1] aufgefundene Resultat, daß die Geschwindigkeit die Fluxion des Weges ist, zugleich das von Huygens verwendete Prinzip in sich, daß die Richtung der Momentangeschwindigkeit mit der Richtung der Bahntangente zusammenfalle.

Die Newtonsche Formel (2) reduziert also das physikalische Problem, die Momentangeschwindigkeit in jedem Augenblicke der Bewegung zu ermitteln, wenn uns die Bahn in ihrer Abhängigkeit von der Zeit, etwa durch die Gleichung

$$s = f(t)$$

gegeben ist (wir wollen zunächst nur an eine geradlinige Bewegung denken), auf ein rein mathematisches Problem; nämlich auf das Problem, diejenige Funktion [wir wollen sie $f'(t)$ nennen] zu ermitteln, die die Eigenschaft hat, die Derivierte der Funktion $f(t)$ zu sein. Haben wir auf Grund unseres eigenen mathematischen Wissens oder durch Nachschlagen in einem Mathematikbuche festgestellt, welche diese Funktion $f'(t)$ ist, so können wir ohne weiteres behaupten, daß zu einer beliebigen Zeit t_1 der bewegte Körper die Momentangeschwindigkeit $f'(t_1)$ habe.[2]

Auch das umgekehrte physikalische Problem, die Berechnung der Bahn des Körpers, wenn die Geschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Zeit oder vom Orte gegeben ist, wird durch die Newtonsche Formel (2) auf ein rein mathematisches Problem zurückgeführt, auf ein Problem derjenigen Rechnungsart, die der Differentialrechnung entgegengesetzt ist und die man als Integralrechnung bezeichnet. Die Integralrechnung, der „calculus summatorius" (wie sie ursprünglich genannt wurde), ist zugleich mit der Differentialrechnung ausgebildet worden, und zwar hauptsächlich zunächst von Leibniz.

Ist die Geschwindigkeit also als Funktion der Zeit bekannt (wir wollen der Einfachheit halber zunächst wieder nur an eine geradlinige Bewegung denken), etwa durch die Gleichung

$$v = \varphi(t),$$

so reduziert sich dann das Problem der Ortsbestimmung darauf, die Funktion $\Phi(t)$ zu ermitteln, deren Derivierte $\varphi(t)$ ist. Da aber nun zwei Funktionen, die sich voneinander nur durch eine additive Konstante

[1] Phil. nat. princ. math., lib. I, sect. I, Scholium. Newtons Darstellung der Differentialrechnung findet sich besonders im ersten Abschnitte des ersten Buches der „Mathematischen Prinzipien der Naturlehre" unter dem Titel: „Methode der ersten und letzten Verhältnisse" (d. h. der Grenzwerte); ferner in der erst nach Newtons Tode veröffentlichten Schrift „Über die Methode der Fluxionen".

[2] $f'(t_1)$ ist der Wert, den die Funktion $f'(t)$ annimmt, wenn $t = t_1$ wird.

unterscheiden, die gleiche Ableitung haben, so sind trotzdem im allgemeinen unendlich viele Lösungen des physikalischen Problems möglich. Es ist nämlich

(3) $$s = \Phi(t) + C,$$

wobei C jeden beliebigen Wert annehmen kann. Diese Willkür verschwindet erst, wenn der Aufenthaltsort des Körpers zu irgend einer bestimmten Zeit bekannt ist. Befindet sich der Körper etwa zu der Zeit t_1 in der Entfernung s_1 vom Ursprung, so können wir auf Grund dieser Tatsache mittels der Gleichung

$$s_1 = \Phi(t_1) + C$$

die Konstante C bestimmen, so daß uns also die Gleichung (3) stets eine ganz bestimmte Lösung für unser Problem gibt. Am praktischesten ist es natürlich, die Zeit von dem Augenblick an zu zählen, in dem der Körper den Bahnursprung verläßt, denn dann verschwindet die Konstante völlig aus der Gleichung (3).

Schwieriger als das Problem der Bestimmung der Momentangeschwindigkeit ist die Aufgabe, bei einer beliebigen Bewegung die Beschleunigung in eine Beziehung zu Ort und Zeit zu bringen. Wie der Begriff der Geschwindigkeit aus der Betrachtung der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung entstanden ist, so ist der von Galilei geschaffene Begriff der Beschleunigung aus der Betrachtung der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung hervorgegangen. Um bei einer solchen Bewegung die Beschleunigung zu ermitteln, bestimmt man die Momentangeschwindigkeit in zwei Punkten, zu den Zeiten t_1 und t_2; die erhaltenen Werte seien v_1 und v_2. Dann ist die Beschleunigug

(4) $$b = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1},$$

und ihr Wert erweist sich als vollkommen unabhängig davon, wo die beiden Punkte und in welcher Distanz voneinander sie liegen. Die Beschleunigung ist also bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung durch die Vermehrung definiert, die in der Zeiteinheit die Momentangeschwindigkeit des bewegten Körpers erfährt.

Im allgemeinen ist natürlich die Berechnung der Beschleunigung keineswegs so einfach, weil man im allgemeinen eben nicht mehr von einer konstanten Beschleunigung der Bewegung, sondern nur von einer momentanen Beschleunigung sprechen kann. Immerhin folgt aber aus dem Beharrungsgesetze, daß zwei Spezialfälle durch größere Einfachheit ausgezeichnet sein müssen: der Fall, in dem die Bewegung zwar gleichförmig bleibt, jedoch die Richtung gleichmäßig geändert wird, und der Fall, in dem die Richtung konstant bleibt, die Geschwindigkeit sich hingegen im Laufe der Zeit ändert. Der erste Fall

wird durch eine gleichförmige Kreisbewegung[1] dargestellt, und für sie hat zuerst Christian Huygens den Wert der Beschleunigung berechnet.[2]

Die Überlegung, die Huygens die Bestimmung der sogenannten Zentripetalbeschleunigung ermöglichte, läßt sich in vereinfachter Form etwa folgendermaßen wiedergeben. Huygens betrachtet eine kleine Massenkugel (also einen materiellen Punkt) in einem Punkte A des Kreisumfanges, der von der Kugel mit der konstanten Geschwindigkeit v durchlaufen werde. Nach dem Beharrungsgesetze müßte sich der Körper, wenn er sich selbst überlassen wäre, vom Punkte A aus mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der Tangente fortbewegen (dieses Prinzip ist, wie schon erwähnt wurde, Huygens geläufig); nach Verlauf der kurzen Zeit Δt müßte also zufolge dem Beharrungsgesetze die Kugel im Punkte B ankommen (Fig. 25), der in der Richtung der Tangente von dem Punkte A um die Strecke $v \cdot \Delta t$ entfernt ist.

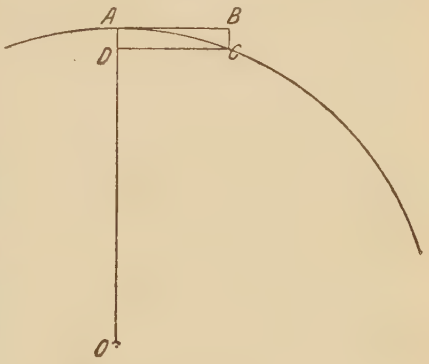

Fig. 25.

Wenn nun aber nach Ablauf der Zeit Δt sich die Kugel tatsächlich nicht im Punkt B befindet, sondern in dem Punkt C auf dem Kreisumfang, wobei

$$\widehat{AC} = v \cdot \Delta t \tag{5}$$

ist, so kann man sich nach dem Gesetze vom Bewegungsparallelogramm die tatsächliche Bewegung von A nach C zusammengesetzt denken aus einer mit konstanter Geschwindigkeit v erfolgenden gleichförmigen Bewegung von A nach B und aus einer geradlinigen Bewegung von A nach D.

Nun ist aber nach einem bekannten geometrischen Satze (da in einem rechtwinkligen Dreieck die Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypothenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitte ist)

[1] Es ist ja schon in der fünften Vorlesung darauf hingewiesen worden, daß im Altertum die gleichförmige Kreisbewegung überhaupt als Idealtypus einer Bewegung angesehen wurde.

[2] Wann er dies tat, läßt sich nicht genau feststellen; er veröffentlichte in seiner berühmten, 1673 erschienenen Schrift über die Pendeluhr „Horologium oscillatorium“ (deutsch in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, Nr. 192) im fünften Buche einige Sätze über die Zentrifugalkraft; Beweise für diese Sätze finden sich aber erst in einer nachgelassenen Schrift „De vi centrifuga“, die nach Huygens Tode 1703 eröffnet wurde.

$$\overline{AC}^2 = AD \cdot 2r$$

(wenn wir mit r den Halbmesser des Kreises bezeichnen); oder, da wir wegen der Kleinheit des Zeitelementes für die Sehne den Bogen setzen können, nach Formel (5)

$$AD = \frac{v^2 \cdot (\Delta t)^2}{2r}. \tag{6}$$

Da also für die Bewegung in der radialen Richtung dieselbe Proportionalität zwischen Weg und Zeitquadrat besteht wie bei dem freien Falle, so hielt sich Huygens für berechtigt, die Partialbewegung in der radialen Richtung für kleine Zeiten als gleichförmig beschleunigt anzusehen, und er erhielt somit auf Grund der Galileischen Prinzipien des freien Falles für die sogenannte Zentripetalbeschleunigung (γ) die einfache Formel

$$\gamma = \frac{v^2}{r}.^1 \tag{7}$$

Nachdem derart Huygens die Größe der Zentripetalbeschleunigung bestimmt hatte, machte Newton in seinen „Mathematischen Prinzipien der Naturlehre" von ganz ähnlichen Überlegungen Gebrauch, um bei den mannigfachen mechanischen Problemen, die er behandelte, aus der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit die Beschleunigung und damit die wirksame Kraft zu ermitteln. Eine allgemeine Formel, die die Beschleunigung in Beziehung zu Weg und Zeit bringt, hat Newton jedoch noch nicht gebracht.

Jedenfalls ist es aber, ohne daß dazu besondere Überlegungen notwendig wären, ganz klar, daß in dem speziellen Falle, in dem die Bewegung geradlinig ist, die Richtung der Beschleunigung also mit der Richtung der Geschwindigkeit und der Bahn zusammenfällt, nach Formel (4) die Momentangeschwindigkeit gleich sein muß

$$b = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{ds^2}{dt^2}, \tag{8}$$

daß also bei der geradlinigen Bewegung die Beschleunigung gleich ist dem zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.[2]

---

[1] Hieraus folgt für die Zentrifugalkraft der Wert

$$K = \frac{mv^2}{r},$$

oder wenn wir die konstante Umlaufszeit mit T bezeichnen,

$$K = \frac{4mr\pi^2}{T^2};$$

Gleichungen, die in den Sätzen enthalten sind, die Huygens zunächst im fünften Buche seines „Horologium oscillatorium" und dann in der erst posthum erschienenen Schrift „De vi centrifuga" mitgeteilt hat.

[2] Vgl. Eulers Mechanica, cap. 3, § 189.

Der erste, der eine einfache, allgemeingültige Formel für Größe und Richtung der Beschleunigung bei einer ganz beliebigen Bewegung angab, war Leonhard Euler. In seiner 1736 erschienenen „Mechanik", die den charakteristischen Titel trug „Mechanica sive motus scientia analytice exposita"[1] — in diesem Werke, in dem zum ersten Male an die Stelle der euklidischen synthetischen Methode die analytische tritt, zerlegte Euler die Kraft und damit auch die Beschleunigung in Komponenten nach drei zueinander senkrechten Richtungen und konnte dadurch den allgemeinen Fall, in dem die Größe und die Richtung der Geschwindigkeit wechseln, leicht auf die beiden einfacheren Spezialfälle zurückführen, bei denen entweder nur die Richtung oder nur die Größe der Geschwindigkeit eine Änderung erfährt.

Euler betrachtet hierzu den kompliziertesten allgemeinsten Fall einer doppelt gekrümmten Bahn[2], bei der die Geschwindigkeit von Stelle zu Stelle sich sowohl ihrem absoluten Betrage als auch ihrer Richtung nach ändert. Die Beschleunigung in einem Punkte der Bahn kann man nach dem früher Gesagten dann derart finden, daß man in diesem Punkte einen Vektor errichtet, der die Geschwindigkeit an dieser Stelle nach Größe und Richtung angibt und in dem benachbarten Punkte, in dem der Massenpunkt nach Ablauf der Zeit dt anlangt, abermals einen Vektor errichtet, der die Geschwindigkeit in diesem Punkte darstellt.

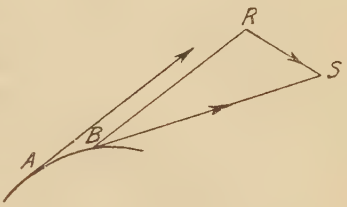

Fig. 26.

Da die beiden Geschwindigkeiten dieselben Richtungen haben wie die Tangenten in den Punkten A und B, da zwei unendlich nahe Tangenten aber (da ja zu ihrer Bestimmung drei Punkte genügen) in einer Ebene liegen, die man als die Schmiegungs- oder Oskulationsebene der Kurve an der betreffenden Stelle bezeichnet, so müssen also auch die beiden Geschwindigkeitsvektoren in derselben Ebene und zwar in der Schmiegungsebene liegen. (Betrachtet man zwei Punkte in endlicher Entfernung, so werden im allgemeinen die Geschwindigkeitsvektoren in den beiden Punkten windschief sein.)

Die Beschleunigung findet man nun offenbar derart, daß man zunächst in dem Punkte B (Fig. 26) einen Vektor BR errichtet, der die gleiche Größe und Länge hat wie der Geschwindigkeitsvektor in A und daß man dann denjenigen Vektor bestimmt, den man zu diesem Vektor BR geometrisch hinzuaddieren muß, um den Vektor BS zu erhalten, der uns die tatsächliche Geschwindigkeit im Punkte B angibt.

[1] Neu herausgegeben in der Gesamtausgabe Leonhardi Euleri Opera omnia, Series secunda, Tom. I, Leipzig 1912.

[2] Eine Kurve heißt doppelt gekrümmt, wenn ihre Punkte nicht in einer Ebene liegen; ein einfaches Beispiel einer doppelt gekrümmten Kurve ist die Schraubenlinie.

(Nachdem man so bereits durch die Richtung RS die Richtung der Beschleunigung gefunden hat, hat man dann noch, um auch den absoluten Wert der Beschleunigung zu finden, die Länge dieser Vektorstrecke in dem Verhältnisse von $dt : 1$ sec zu vergrößern, das heißt sie noch durch dt zu dividieren.)

Die Beschleunigung muß also jedesfalls in derselben Ebene liegen wie die beiden Geschwindigkeitsvektoren in A und B, also ebenfalls in der Schmiegungsebene; in der Richtung, die auf der Oskulationsebene senkrecht steht und die man als die Richtung der Binormalen bezeichnet, muß daher bei jeder Art der Zerlegung die Komponente verschwinden.

Euler zerlegt nun die Kraft und damit auch die Beschleunigung in drei zueinander senkrechte Komponenten. Durch dieses Verfahren gewinnt er, da ja die drei zueinander senkrechten Kraftkomponenten voneinander völlig unabhängig sein müssen (wie wir schon in der zweiten Vorlesung sahen) die Möglichkeit, jede dieser Komponenten so zu behandeln, als ob die beiden anderen Kraftkomponenten gar nicht vorhanden wären. Als Richtungen für diese drei zueinander senkrechten Komponenten wählt nun Euler erstens die Richtung der Tangente, zweitens die Richtung der Hauptnormalen (die bekanntlich in der Oskulationsebene auf der Tangente senkrecht steht und die stets von der konkaven Seite der Kurve weg gerechnet wird) und drittens die Richtung der Binormalen.

Die Komponente in der dritten Richtung ist nach dem früher Gesagten stets Null; die Betrachtung der beiden anderen Komponenten läßt sich aber nun, da ja die drei zueinander senkrechten Komponenten voneinander völlig unabhängig sind und man daher jede so betrachten kann, als ob die beiden anderen gar nicht vorhanden wären, stets auf die Betrachtung der beiden vorhin besprochenen einfachen Spezialfälle zurückführen, in denen entweder nur der absolute Betrag der Geschwindigkeit oder nur die Richtung der Bewegung geändert wird.

Die Tangentialbeschleunigung — wir wollen sie b_t nennen — läßt sich also auf Grund der Formel (8) ohne weiteres angeben; sie ist

$$b_t = \frac{dv}{dt}. \tag{9}$$

Für die Beschleunigung in der Richtung der Hauptnormalen, für die sogenannte Normalbeschleunigung (b_n) gilt aber wieder die in Gleichung (7) enthaltene Formel von Huygens, da man nach einem bekannten Satze der Differentialgeometrie ein verschwindend kleines Stück einer Kurve, das nur drei benachbarte Punkte enthält, stets als einen Kreisbogen ansehen kann, dessen Mittelpunkt in der Hauptnormalen liegt. Man nennt diesen Kreis, durch dessen Bogen man sich stets das kleine Kurvenstück ersetzt denken kann, bekanntlich den

Krümmungskreis und seinen Halbmesser (ϱ) den Krümmungsradius der Kurve an der betreffenden Stelle; man kann sich also für die Berechnung der Normalbeschleunigung die tatsächlich ganz unregelmäßige Bewegung in dem Zeitintervall dt ebenso durch eine gleichmäßig kreisförmige ersetzt denken wie für die Berechnung der Tangentialbeschleunigung durch eine gleichförmig beschleunigte geradlinige. Die Beschleunigung in der Richtung der Hauptnormalen ist also[1] gleich

$$b_n = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{10}$$

Indem wir die Gleichungen (9) und (10) noch mit der Masse des materiellen Punktes multiplizieren, erhalten wir auf Grund des zweiten Newtonschen Bewegungsaxioms, wenn wir die drei Komponenten der Kraft in den Richtungen der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen mit K_t, K_n und K_b bezeichnen, die drei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} K_t &= m \cdot \frac{dv}{dt}, \\ K_n &= m \cdot \frac{v^2}{\varrho}, \\ K_b &= 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Man bezeichnet diese Relationen, die also zuerst Euler[2] im Jahre 1736 aufstellte, als die „natürlichen" Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes.

---

[1] Die Gesamtbeschleunigung ist also gleich

$$b = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2}},$$

und ihre Richtung ist dadurch bestimmt, daß sie in der Schmiegungsebene liegt und mit der Tangente einen Winkel φ bildet, der durch die Gleichung bestimmt ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b_n}{b_t} = \frac{v^2}{\varrho \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)}.$$

Die Kraft hat natürlich dieselbe Richtung; ihren absoluten Betrag finden wir, indem wir die Gesamtbeschleunigung noch mit der Masse des bewegten Körpers multiplizieren.

[2] Mechanica, cap. 5, §§ 543ff.

Achte Vorlesung.

Die Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes in rechtwinkligen und in Polarkoordinaten.

Wir haben zuletzt davon gesprochen, wie es Euler unter Benutzung des Grundsatzes, daß eine Kraft in einer zu ihr senkrechten Richtung keinerlei Wirkung hervorzubringen vermag, gelang, das komplizierte Problem der ganz unregelmäßigen, krummlinigen Bewegung in drei einfache und ohne Schwierigkeiten lösbare Spezialprobleme zu zerfällen. Dadurch konnte er die sogenannten natürlichen Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes ableiten — Gleichungen, die für jede beliebige krummlinige Bewegung für jede Stelle der Bahn nach Größe und Richtung die Kraft angeben, in ihrer Abhängigkeit von den augenblicklichen absoluten Werten der Geschwindigkeit, der Geschwindigkeitsänderung und der Bahnkrümmung.

Dieses Resultat konnte, wie schon erwähnt, Euler dadurch gewinnen, daß er für jeden Augenblick der Bewegung die Kraft in drei zueinander senkrechte Komponenten spaltet. Die Zerlegung wird stets derart vorgenommen, daß eine der drei Komponenten verschwindet; dann kann man stets eine der beiden übrigen Komponenten nach den Grundsätzen der ungleichförmigen geradlinigen Bewegung berechnen und die andere nach den Prinzipien, die für eine mit konstanter Geschwindigkeit erfolgende Kreisbewegung gelten.

Wenn nun auch diese Methode ohne weiteres die Berechnung der Kraft bei gegebener Bahn ermöglicht, so erweist sie sich doch als ungemein kompliziert, wenn das umgekehrte, meist aber viel wichtigere Problem vorliegt, wenn nämlich die wirkende Kraft nach Größe und Richtung als Funktion des Ortes gegeben und die Bahn des Punktes zu bestimmen ist. Bei solchen Aufgaben tritt deutlich der große Nachteil der Methode zutage, der darin besteht, daß im allgemeinen das Koordinatensystem, nach dem die Zerlegung vorgenommen wird, von Stelle zu Stelle der Bahn seine Orientierung im Raume ändert.

Sechs Jahre nun, nachdem Eulers „Mechanica“ erschienen war, veröffentlichte im Jahre 1742 der englische Mathematiker Mac Laurin sein berühmtes Werk „A complete system of fluxions“, in dem er die Infinitesimalrechnung (um deren Ausbildung er sich bekanntlich große Verdienste erworben hat) auch auf mechanische (meist freilich plani-

metrische) Probleme ausdehnte, und hierbei machte Mac Laurin zum ersten Male von dem Verfahren Gebrauch, die Kräfte und die Bewegungen in Komponenten nach fixen, von der Bewegung unabhängigen Koordinatenachsen zu zerlegen.[1]

Die ungeheuren Vorteile, die dieses Verfahren gegenüber dem früheren bietet, erkannte bald auch Euler. Schon in seiner 1753 erschienenen „Theoria motus lunae" machte er von diesem Verfahren ganz allgemein bei seinen himmelsmechanischen Untersuchungen Gebrauch. Als er dann im Jahre 1765 seine berühmte „Theoria motus corporum solidorum" erscheinen ließ, da benutzte er diese Gelegenheit, um seinem Werke eine hochbedeutende Einleitung vorauszuschicken, in der er in sechs Kapiteln die Mechanik eines materiellen Punktes unter Benutzung eines fixen Koordinatensystems entwickelte.

Euler geht hierbei von dem Grundsatze aus, daß — welcher Art auch immer die Bewegung sei, die von einer bestimmten Stelle aus ein materieller Punkt zurücklegt — man doch stets drei geradlinige, zueinander senkrechte, von dieser Stelle aus beginnende, fingierte Bewegungen angeben könne, die derart beschaffen sind, daß ihre Superposition nach dem Satze des Bewegungsparallelogrammes eine Bewegung ergibt, die nicht nur in ihrem Endresultate, sondern auch in ihrem ganzen Verlaufe mit der tatsächlichen Bewegung des materiellen Punktes übereinstimmt.

Wenn also auch in der Natur der materielle Punkt nur eine einzige, die tatsächliche Bewegung wirklich zurücklegt, so kann man ihm doch „im Geiste" stets drei verschiedene Bewegungen zuschreiben und sich aus diesen drei geradlinigen und zueinander senkrechten Bewegungen die tatsächliche krumme zusammengesetzt denken. Komplizierte Untersuchungen über die Krümmung der Bahn werden dann vollkommen überflüssig. Denn durch die Auflösung der tatsächlichen Bewegung in drei fingierte, durch die „resolutio motus", wie Euler diese Methode nennt, verliert das Problem der krummlinigen Bewegung alle Schwierigkeit; es erscheint dadurch völlig auf das Problem der geradlinigen Bewegung zurückgeführt.

„Durch dieses Verfahren werden wir", so erklärt Euler selbst in seinem Werke, „von mehreren recht verdrießlichen Untersuchungen über die Krümmung der Bahn befreit, die ja eben eine doppelte ist, wenn die Bewegung nicht in derselben Ebene verläuft. Ersetzt man aber die Geschwindigkeit des Körpers durch drei Geschwindigkeiten, die man im Geiste dem materiellen Punkte zuschreibt, so erfährt das ganze Problem eine außerordentliche Vereinfachung und, da ich eben (so fährt Euler fort) dieses Hilfsmittel in den früheren Werken über die Mechanik

[1] A complete system of fluxions; die Abschnitte über die Zentripetalkräfte im 1. Buch, Kap. 11 und im 2. Buch, Kap. 5.

nicht gebraucht habe, so bin ich in allzu verwickelte Rechnungen hineingeraten."[1]

Das erste Problem, das sich aus der Resolutio motus ergibt, besteht nun darin, für jeden Zeitpunkt der tatsächlichen Bewegung die Geschwindigkeiten zu ermitteln, mit denen in demselben Augenblicke die fingierten Partialbewegungen erfolgen müssen, damit ihre Superposition die tatsächliche Bewegung mit der tatsächlichen Geschwindigkeit ergibt; und da kann nun Euler leicht zeigen, daß diese Geschwindigkeiten der Partialbewegungen identisch sind mit den Komponenten des Geschwindigkeitsvektors nach den drei Koordinatenachsen.

Daß dies tatsächlich der Fall ist, beweist Euler folgendermaßen. Der materielle Punkt lege während des Zeitelementes dt, das wir betrachten, das Wegelement $d\mathfrak{s}$ zurück, dessen Projektionen auf die drei Koordinatenachsen dx, dy, dz seien. Man nennt dann bekanntlich dx, dy, dz die Komponenten des Vektors $d\mathfrak{s}$. Bildet dieser mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ, so gelten die einfachen Beziehungen

$$(1) \qquad \begin{cases} dx = ds \cdot \cos\alpha, \\ dy = ds \cdot \cos\beta, \\ dz = ds \cdot \cos\gamma. \end{cases}$$

Die Geschwindigkeit ist nun, wie wir in der letzten Vorlesung sahen, ebenfalls ein Vektor, der die gleiche Richtung hat, wie der Vektor $d\mathfrak{s}$ und den absoluten Betrag $\frac{ds}{dt}$. Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ erhält man dann wieder durch Projektion eines Vektors von der Länge $\frac{ds}{dt}$ auf die drei Koordinatenachsen, mit denen der Vektor $\mathfrak{v}$ dieselben Winkel bildet, wie der Vektor $d\mathfrak{s}$. Es ist also

$$(2) \qquad \begin{cases} v_x = \frac{ds}{dt} \cdot \cos\alpha, \\ v_y = \frac{ds}{dt} \cdot \cos\beta, \\ v_z = \frac{ds}{dt} \cdot \cos\gamma; \end{cases}$$

und ein Vergleich mit den Formeln (1) ergibt dann die einfachen Beziehungen

[1] Theoria motus corporum solidorum, Introductio, cap. I, § 60: hoc modo a pluribus investigationibus satis taediosis circa curvaturam spatii descripti, eamque duplicem, nisi motus in eodem plano fiat, liberamur. Hae enim ternae celeritates, mente saltem puncto mobili tributae, totum negotium expedient; quo subsidio cum non sim usus in superioribus de Mechanica libris, in nimis intricatos calculos sum delapsus.

$$(3)\qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt}, \\ v_y = \dfrac{dy}{dt}, \\ v_z = \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen[1] stehen aber auf der linken Seite die Komponenten der tatsächlichen Geschwindigkeit, auf der rechten Seite die Geschwindigkeiten der fingierten Partialbewegungen, die somit den Komponenten der **tatsächlichen Geschwindigkeit gleich sind.**

Ohne lange Überlegung kann man aber auch sogleich für jeden Augenblick die Beschleunigungen der drei Partialbewegungen angeben. Denn da keine Kraft in einer zu ihr senkrechten Richtung irgendwelche Wirkungen auszuüben vermag, so ist es ohne weiteres klar, daß die Geschwindigkeitsänderungen bei der Partialbewegung in der x-Richtung ganz dieselben sein müssen, wie wenn sich der Massenpunkt überhaupt nur unter dem Einfluß einer Kraft X bewegte (wenn man unter X, Y, Z die drei zueinander senkrechten Komponenten der gesamten Kraft nach den drei Koordinatenachsen versteht).

Wenn sich aber nun ein Massenpunkt nur unter dem Einfluß einer stets gleichgerichteten Kraft bewegt, so kann man (so wie es schon Galilei bei der Untersuchung der Wurfbewegung tat) immer die Bewegung in zwei Komponenten spalten, deren eine unter dem Einfluß des Beharrungsvermögens gleichförmig stattfindet (bei der es also überhaupt keinen zweiten Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit gibt) und in eine geradlinige beschleunigte in der Richtung **der wirkenden Kraft.**

Es muß also jedenfalls auch bei unserem allgemeinen Probleme die einfache Bewegungsgleichung bestehen, die für unseren Massenpunkt gelten würde, wenn er sich geradlinig in der Richtung der x-Achse unter dem Einfluß der Kraft X bewegte; und diese einfache Bewegungsgleichung müßte natürlich nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsaxiom [vgl. Formel (8) der siebenten Vorlesung] aussagen, daß für jeden Augenblick der Bewegung die Kraft X (die ja veränderlich sein kann) gleich sein muß dem Produkte aus der Masse des Punktes und aus dem Werte, den in diesem Augenblicke der zweite Differentialquotient der x-Koordinate des Punktes nach der Zeit hat.

Ganz dieselbe Überlegung, wie wir sie für die Partialbewegung in der x-Richtung anstellten, können wir nun auch für die Partialbewegungen in der y- und z-Richtung anstellen, und wir gelangen dadurch zu den drei Bewegungsgleichungen eines freien materiellen Punktes, ausgedrückt in orthogonalen Koordinaten; nämlich

[1] Theoria motus corporum solidorum, Introductio, cap. I, § 57.

$$(4) \qquad \begin{cases} X = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ Y = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ Z = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{cases}$$

Dies sind die berühmten Gleichungen[1], die das Problem der unregelmäßigen krummlinigen Bewegung auf das Problem der geradlinigen Bewegung zurückführen. Sie ermöglichen es nicht nur ohne weiteres, bei gegebener Bahn für jeden Augenblick die gesamte Kraft nach Größe und Richtung zu ermitteln; sie gestatten auch — im Gegensatze zu den „natürlichen" Bewegungsgleichungen — allgemeine Lösungen für das umgekehrte Problem. Sie führen nämlich, wenn die Kraft gegeben ist, durch zweimalige Integration zu einer bestimmten Relation zwischen den Werten von x, y und z und damit zu einem analytischen Ausdruck für die geometrische Gestalt der Bahn.

Da nach dem zweiten Newtonschen Axiom die gesamte Beschleunigung der gesamten Kraft gleichgerichtet und ihr proportional ist, so muß natürlich auch für jede beliebige Richtung die entsprechende Komponente der Beschleunigung, multipliziert mit demselben Proportionalitätsfaktor, gleich sein der entsprechenden Komponente der Kraft. Aus den zuletzt angegebenen Bewegungsgleichungen folgen also ohne weiteres die Formeln für die drei orthogonalen Komponenten der Beschleunigung

$$(5) \qquad \begin{cases} b_x = \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ b_y = \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ b_z = \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{cases}$$

Es sind also auch die Beschleunigungen der fingierten Partialbewegungen gleich den Projektionen der tatsächlichen Beschleunigung.

Man kann natürlich auch in streng geometrischer Weise, ganz unabhängig von diesen physikalischen Betrachtungen, die Richtigkeit der Gleichungen (5) beweisen. Denn die x-Komponente der Beschleunigung (b_x) kann man offenbar auch derart berechnen, daß man die

[1] Euler, Theoria motus corporum solidorum, Introd., cap. III, § 175. Bei Euler haben die Gleichungen folgende Gestalt:

$$\frac{d\,dx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}, \qquad \frac{d\,dy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A}, \qquad \frac{d\,dz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A},$$

wobei A die Masse bedeutet; p, q, r sind die rechtwinkligen Komponenten der angreifenden Kraft; λ ist ein Proportionalitätsfaktor, dessen Größe von der Wahl der Einheiten abhängt.

Tangential- und die Normalbeschleunigung auf die x-Achse projiziert und die beiden Projektionen (p_1 und p_2) zueinander addiert.

Die Tangente bildet mit der x-Achse einen Winkel α, dessen Kosinus gleich ist $\frac{dx}{ds}$; folglich ist die Projektion der Tangentialbeschleunigung auf die x-Achse

$$p_1 = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Die Hauptnormale bildet aber nach einem bekannten Satze der Differentialgeometrie[1] mit der x-Achse einen Winkel l, für den die Beziehung gilt

$$\cos l = \varrho \cdot \frac{d^2x}{ds^2},$$

wenn ϱ den Krümmungsradius an der betreffenden Stelle der Kurve bedeutet. Folglich ist die x-Komponente der Normalbeschleunigung nach Gleichung (10) von Vorlesung 7

$$p_2 = \frac{v^2}{\varrho} \cdot \cos l = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Die Summe beider Projektionen ist aber gleich der x-Komponente der Beschleunigung und folglich ist

$$b_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds}\right) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (5).

Neben der Zerlegung nach drei zueinander senkrechten, festen Koordinatenachsen hat Euler in der Einleitung zu seiner „Theoria motus" auch das zweite wichtige Problem gelöst, die Geschwindigkeiten, die Beschleunigungen und die Kräfte als Funktionen von Polarkoordinaten darzustellen. Wir wollen uns hier nur auf den einfacheren Fall beschränken, den Euler gelöst hat, in dem nämlich die Bewegung in einer Ebene stattfindet. Es handelt sich also dann darum, zunächst die Geschwindigkeit als Funktion von r und φ auszudrücken, wenn unter r die Entfernung von einem festen Punkt (dem Koordinatenursprung) zu verstehen ist und unter φ der Winkel, den der zu dem festen Punkte gezogene Strahl mit einer bestimmten Richtung bildet (die die Nullrichtung darstellt).

Um dieses Problem zu lösen, betrachtet Euler einen materiellen Punkt in zwei um eine verschwindend kurze Zeit dt voneinander verschiedenen Lagen. Der Massenpunkt befinde sich zur Zeit t im Punkte A (Fig. 27) und zur Zeit $t+dt$ im Punkte A'. Der Winkel, den die von dem

[1] Vgl. z. B. Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, 4. und 5. Aufl. (Leipzig 1908), Bd. I, § 261.

festen Punkt O nach A und A' gezogenen Strecken miteinander bilden, sei $d\varphi$; der Unterschied zwischen den Längen von OA' und OA sei dr; dr gibt uns also an, um wieviel sich die Entfernung des bewegten Punktes von dem Zentrum in der Zeit dt änderte. Wir tragen nun von dem Zentrum O aus auf der Geraden OA' die Strecke OA auf und erhalten so den Punkt B. AB steht dann auf den (voneinander nur unendlich wenig verschiedenen) Richtungen OA und OA' senkrecht und ist gleich $r \cdot d\varphi$.[1] BA' ist gleich dr. Die Geschwindigkeit kann man also jetzt leicht

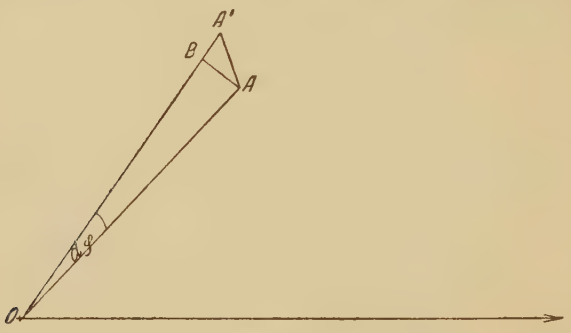

Fig. 27.

durch r und φ ausdrücken. Denn sie ist ja gleich der Länge von AA', aber vergrößert im Verhältnisse von dt zur Zeiteinheit. Es ist also

$$v = \sqrt{\left(r \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}. \tag{6}$$

Andererseits kann man die Geschwindigkeit aber in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen, eine in der Richtung von r und eine in der Richtung AB senkrecht dazu, welche Komponenten man zweckmäßig als v_r und v_φ bezeichnet. (Die dritte Komponente, die auf diesen beiden senkrecht steht, ist natürlich immer gleich Null, da ja nach unserer Voraussetzung der Punkt die Ebene nicht verlassen soll.) Es ist nun, wie man auf Grund der früheren Betrachtung ohne weiteres erkennt[2]

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{dr}{dt}, \\ v_\varphi = r \cdot \dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases} \tag{7}$$

Es handelt sich nun weiter darum, auch die Kraft, also zunächst die Beschleunigung durch r und φ auszudrücken, und dazu wird man

[1] Denn es ist $AB = OA \cdot \sin(d\varphi)$; der Sinus eines kleinen Winkels ist aber auch gleich dem Winkel selbst, wenn dieser im Bogenmaße gemessen wird.

[2] Euler, Theoria motus corporum solidorum, Introd., cap. I, § 66.

zweckmäßig auch die Beschleunigung in zwei Komponenten zerlegen, deren eine die Richtung des Radiusvektors hat, deren andere auf ihr senkrecht steht, und diese beiden Komponenten wollen wir b_r und b_φ nennen; durch ihre absoluten Werte ist natürlich die Beschleunigung nach Richtung und Größe bestimmt.

Um nun die beiden Komponenten der Beschleunigung zu finden, verfährt Euler folgendermaßen. Er betrachtet wieder einen Massenpunkt, der von A nach A' in der Zeit dt kommt. Die Kraft, die im Punkt A auf den Körper wirkt, zerlegt er in zwei Komponenten, eine, die in der Richtung von OA wirkt und die K_r genannt werden möge, und eine dazu senkrechte, die in der Richtung AB wirkt und die K_φ sei.

Nun bestehen, wie ohne weiteres ersichtlich, zwischen x, y, r und φ die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi, \\ y &= r \cdot \sin\varphi. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Ebenso können wir aber auch die x- und die y-Komponenten der Beschleunigung leicht durch b_r, b_φ und φ ausdrücken. Denn die x-Komponente der Beschleunigung erhalten wir offenbar, wenn wir zunächst b_r und dann b_φ auf die x-Achse projizieren und dann diese beiden Projektionen addieren; denn ihre Summe ist nach einem bekannten elementaren Satze der Geometrie gleich der Projektion der gesamten Beschleunigung auf die x-Richtung. Da aber b_r mit der x-Achse den Winkel φ bildet und b_φ den Winkel $90+\varphi$, und mit der y-Achse b_r den Winkel $90-\varphi$ bildet und b_φ den Winkel φ, so ist

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= b_r \cdot \cos\varphi - b_\varphi \cdot \sin\varphi, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= b_r \cdot \sin\varphi + b_\varphi \cdot \cos\varphi. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Wir multiplizieren nun die obere Gleichung mit $\cos\varphi$ und die untere mit $\sin\varphi$ und addieren beide. Dann multiplizieren wir die obere Gleichung mit $\sin\varphi$ und die untere mit $\cos\varphi$ und subtrahieren beide. Wir erhalten derart die beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \cos\varphi + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \sin\varphi &= b_r, \\ \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \sin\varphi - \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \cos\varphi &= -b_\varphi. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Um also b_r und b_φ als Funktionen der Polarkoordinaten darzustellen, müssen wir in diesen Gleichungen die Größen x und y, die noch vorkommen, durch die Größen r und φ ersetzen, und dazu gehen wir von den beiden schon früher angegebenen Gleichungen aus

$$x = r\cos\varphi\,,$$
$$y = r\sin\varphi\,.$$

Wir multiplizieren mit Euler zunächst die obere Gleichung mit $\cos\varphi$ und die untere mit $\sin\varphi$ und addieren; dann multiplizieren wir die obere Gleichung mit $\sin\varphi$ und die untere mit $\cos\varphi$ und subtrahieren. Wir finden derart

$$(11)\qquad \begin{cases} x\cos\varphi + y\sin\varphi = r\,, \\ x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0\,. \end{cases}$$

Differentiieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$(12)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt}\cdot\cos\varphi + \frac{dy}{dt}\cdot\sin\varphi - x\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} + y\cdot\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt}\,, \\ \frac{dx}{dt}\cdot\sin\varphi - \frac{dy}{dt}\cdot\cos\varphi + x\cdot\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} + y\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} = 0\,. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen können wir aber nun unter Benutzung der Formeln (11) wesentlich vereinfachen; wir erhalten dann

$$(13)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt}\cdot\cos\varphi + \frac{dy}{dt}\cdot\sin\varphi = \frac{dr}{dt}\,, \\ \frac{dx}{dt}\cdot\sin\varphi - \frac{dy}{dt}\cdot\cos\varphi = -r\cdot\frac{d\varphi}{dt}\,. \end{cases}$$

Da ja in den Gleichungen (10) die zweiten Differentialquotienten von x und y nach der Zeit durch Polarkoordinaten ersetzt werden sollen, differentiiert also Euler diese Gleichungen (13) noch einmal nach der Zeit; dadurch erhält er

$$(14)\qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\cos\varphi + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\sin\varphi - \frac{dx}{dt}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} \\ \qquad + \frac{dy}{dt}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\,, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\sin\varphi - \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\cos\varphi + \frac{dx}{dt}\cdot\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} \\ \qquad + \frac{dy}{dt}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} - r\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen vereinfacht nun Euler abermals mittels der vorher gewonnenen Formeln (13) und erhält dann

$$(15)\qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\cos\varphi + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\sin\varphi + r\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{d^2r}{dt^2}\,, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\sin\varphi - \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\cos\varphi + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,. \end{cases}$$

Ein Vergleich dieser beiden Gleichungen mit den Gleichungen (10) ergibt aber nun ohne weiteres die gewünschten Formeln, in denen b_r

und b_φ lediglich als Funktionen der Polarkoordinaten erscheinen; nämlich

$$(16) \qquad \begin{cases} b_r = \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r \cdot \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ b_\varphi = r \cdot \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt} \cdot \dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Diese Formeln[1], in denen man wiederum b_r gleichsetzen kann $K_r : m$ und b_φ gleich $K_\varphi : m$ (wenn wir unter K_r und K_φ die beiden Komponenten der Kraft in der Richtung von r und senkrecht dazu verstehen), diese Formeln also sind die Gleichungen für die Bewegung eines frei in einer Ebene sich bewegenden materiellen Punktes, ausgedrückt in Polarkoordinaten; es sind dies Gleichungen, die in vielen Fällen, wie uns schon ein Beispiel in einer der nächsten Vorlesungen zeigen wird, die Behandlung mechanischer Probleme wesentlich vereinfachen.

[1] Euler, Theoria motus corporum solidorum, Introd., cap. V, § 217.

Neunte Vorlesung.

Die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegungen.

Die Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes, die wir in mehrfacher Gestalt in den letzten zwei Vorlesungen kennen gelernt haben, stellen nur eine für die mathematische Behandlung dynamischer Probleme geeignetere Form des zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes dar; sie gestatten die Anwendung leichterer Methoden, ohne aber in physikalischer Hinsicht mehr auszusagen, als die zweite „lex motus"; die Kenntnisse, die bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen außer dem zweiten Newtonschen Axiome verwertet wurden, waren rein geometrische.

In der Tat reicht (wenn auch eben der synthetische Weg komplizierter und weniger bequem ist) dennoch auch ohne das Hilfsmittel der analytischen Bewegungsgleichungen bereits das zweite Newtonsche Bewegungsgesetz für sich aus, um bei einer Bewegung, bei der die Bahn in ihrer Form und in ihrer Abhängigkeit von der Zeit gegeben ist, das Gesetz der wirksamen Kraft zu ermitteln; und das großartigste Beispiel hierfür hat Newton selbst gegeben, indem er das Gesetz der universellen Gravitation aus den Gesetzen erschloß, die den Verlauf der Planetenbewegungen beschreiben und mit deren Entstehungsgeschichte wir uns in dieser Vorlesung befassen wollen.

Das Studium der Planetenbahnen reicht jedenfalls weit in das Altertum zurück. Genaue Beobachtungen und Messungen über den Lauf der Wandelsterne am Fixsternhimmel haben wohl schon alle alt-orientalischen Kulturvölker, Chinesen, Inder, Babylonier und Ägypter angestellt. In der griechischen Astronomie begegnet uns auch schon frühzeitig das Bestreben, den Lauf der Planeten mit der scheinbaren, ewig gleichmäßigen Kreisbewegung des Fixsternhimmels in Einklang zu bringen; und es ist natürlich, daß man diesen Einklang derart herzustellen suchte, daß man die Bewegungen der Planeten auf die Kombination mehrerer solcher Kreisbewegungen zurückführte. Denn die gleichförmige Kreisbewegung, die in der schönsten Kurve und mit unveränderlicher Geschwindigkeit immer wieder zu ihrem Anfange zurückführt und die dennoch sich ewig gleich bleibt, erschien den antiken Physikern als die einzige wahrhaft vollkommene Bewegung, jedenfalls als die einzige Bewegung, die der unvergänglichen

„göttlichen" Himmelskörper würdig befunden werden konnte. Da die Alten die Erde als das ruhende Zentrum der Welt ansahen, war es selbstverständlich, daß sie, wenn sie von den Planetenbewegungen die größte nur mögliche Einfachheit und Schönheit beanspruchten, hierbei die Bewegungen im Auge hatten, die die Planeten in bezug auf einen auf der Erde befindlichen Beobachter ausführen.

Die erste Theorie, die von solchen Gesichtspunkten aus das Problem der Planetenbahnen zu lösen suchte, stammte in ihrer Grundidee von Platon und wurde hauptsächlich von dessen Schüler, dem Mathematiker und Astronomen Eudox von Knidos, in exakter Weise ausgestaltet. Sie erklärte die tatsächlichen Bewegungen der Planeten als eine Kombination von mehreren gleichförmigen Kreisbewegungen, die mit gleichen Radien um dasselbe Zentrum, nämlich um die Erde, jedoch in verschiedenen Ebenen und mit verschiedener Geschwindigkeit zurückgelegt werden. Eudox nahm nämlich an, daß die Bewegung jedes Planeten aus der Bewegung mehrerer Sphären resultiere, die alle die Erde zum Mittelpunkte haben, jedoch verschiedene Achsen und verschiedene Umdrehungszeiten besitzen.[1] Diese sogenannte homozentrische Sphärentheorie, die durch die Notwendigkeit beständiger Erweiterungen[2] immer weniger brauchbar wurde, ersetzte dann Hipparch von Nicäa (im zweiten Jahrhundert v. Chr.) durch eine neue Theorie, bei der er die Planeten um die Erde exzentrische Kreise beschreiben ließ.

Ihre höchste Blüte erreichte im Altertum die Astronomie durch Claudius Ptolemaeus (um 100 n. Chr.), der deutlich die Unzulänglichkeit der beiden älteren Theorien gegenüber den schwierigeren astronomischen Problemen erkannte und darum eine neue schuf, die fast zwei Jahrtausende die herrschende bleiben sollte. Die ptolemaeische Theorie beruht auf einer genialen (indessen schon vor Ptolemaeus entstandenen) Hypothese, die die Vorstellung von der Kreisbewegung der Himmelskörper beibehält und dennoch die Möglichkeit bietet, mit einer eigentlich unbegrenzten Genauigkeit die tatsächlichen periodischen Himmelsbewegungen richtig zu beschreiben. Diese Hypothese läßt nämlich in ihrer einfachsten Form die Himmelskörper mit konstanter Geschwindigkeit Kreise zurücklegen, aber um Mittelpunkte, die ihrerseits selbst wieder gleichförmig auf Kreisen fortwandern, die die Erde zum Mittelpunkt haben. Die Bahnen der Planeten erscheinen also in dieser

[1] Eudox nahm bei jedem der fünf damals bekannten Planeten (Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn) vier durchsichtige Kugelschalen an. Eine Kugelschale ruft die tägliche Bewegung mit dem Fixsternhimmel hervor; eine zweite die Veränderungen der Länge, eine dritte die Veränderungen der Breite, eine vierte ist notwendig, um die rückläufigen Bewegungen der Planeten zu erklären. Die ersten drei Kugelschalen brauchte Eudox auch bei der Sonne und bei dem Mond, die ja im geozentrischen System ebenfalls als Wandelsterne erschienen. Da überdies noch die Sphäre des Fixsternhimmels hinzukam, arbeitete also die Theorie des Eudox mit insgesamt 27 Sphären.

[2] Bei Aristoteles betrug die Zahl der Sphären bereits 56.

Theorie als Epizykeln, und zwar muß man sie notwendigerweise als Epizykeln von um so höherer Ordnung betrachten, mit je größerer Genauigkeit die tatsächlichen Planetenbewegungen beschrieben werden sollen.

Die Epizykelntheorie war schon in der ursprünglichen Gestalt, die ihr Ptolemaeus gab, so kompliziert, daß dieser selbst einst meinte, es sei leichter, die Planeten zu bewegen, als ihre Bewegungen zu verstehen. Die Epizykelntheorie mußte aber um so verwickelter werden, je besser die astronomischen Beobachtungsmethoden wurden und eine je genauere Anpassung an die Erfahrung infolgedessen von der Theorie beansprucht wurde. Die eigentliche Schuld an der ungeheuren Kompliziertheit der theoretischen Astronomie trug aber, wie schon gesagt, die unnötig schwierige Problemstellung, die eine Erklärung der von den Planeten um die Erde beschriebenen Bahnen durch gleichförmige Kreisbewegungen verlangte.

Wenn also auch der Gedanke einer Eigenbewegung der Erde schon im Altertume von den Pythagoreern[1] und in der Renaissancezeit von Nikolaus Cusanus[2] vertreten worden war, wenn auch der Pythagoreer Aristarch von Samos schon ein heliozentrisches astronomisches System entworfen hatte, so gebührt doch jedenfalls Copernicus ein unleugbares und in seiner ganzen Größe kaum zu ermessendes Verdienst, das auch seine Zeitgenossen voll anerkennen mußten — ohne Rücksicht auf die Frage, ob die Erde tatsächlich den ruhenden Mittelpunkt des Alls darstelle oder keinerlei Vorzugsstellung im Universum einnehme.

Denn Copernicus hat in seinem berühmten Werke über die Umläufe der Himmelskörper (De revolutionibus orbium coelestium)[3] in ausführlicher und exakter Weise dargelegt, welch ungeheure Vereinfachung die ganze theoretische Astronomie erfährt, wenn sie darauf verzichtet, die Bahnen der Planeten um die Erde zu studieren und sich vielmehr die neue Aufgabe stellt, die Bewegungen der Planeten so zu beschreiben, wie sie einem auf der Sonne befindlichen Beobachter erscheinen müßten. Denn Copernicus konnte zeigen, daß man zu einer ziemlichen und, wie er glaubte, hinreichenden Übereinstimmung mit der Erfahrung gelangt, wenn man annimmt, daß die Planeten einfache, gleichförmige

[1] Die Pythagoreer nahmen ein „Zentralfeuer" an, um das sich in zehn Sphären die Himmelskörper bewegen. Die äußerste Sphäre stellt den Fixsternhimmel dar; die anderen bewegen die fünf damals bekannten Planeten, die Sonne, den Mond, die Erde und die sogenannte Gegenerde, die gleich dem Zentralfeuer ewig dem Anblicke der Bewohner unserer Erdhälfte entzogen bleibt.

[2] Cusanus lehrte in seinem Werke „De docta ignorantia" in übrigens recht unklarer Weise, daß die Erde gleich der Sonne und den Planeten eine eigene Bewegung besitzen müsse; mit der heliozentrischen Theorie hat also seine Lehre nur indirekt zu tun.

[3] Das Werk erschien im Todesjahre des Copernicus 1543 in Nürnberg.

Kreisbahnen um die Sonne beschreiben, daß dasselbe aber auch die Erde tut und daß überdies die Erde in 24 Stunden einmal um ihre Achse rotiert.

Copernicus opferte also die eine der beiden Grundideen der hellenischen Astronomie, die geozentrische Annahme, konnte aber gerade dadurch die andere antike Grundidee, daß die Bewegungen der Himmelskörper von dem idealen Typus der gleichförmig in sich zurückkehrenden, kreislinigen Bewegung sein müßten, wieder in der ursprünglichen erhabenen Einfachheit herstellen, die mittlerweile infolge der Fortschritte der Astronomie ganz verloren gegangen war.

Copernicus hat bekanntlich auch selbst einige physikalische und astronomische Gründe angeführt, die für die heliozentrische Annahme sprechen; er hat z. B. auf die ungeheure Geschwindigkeit hingewiesen, die der Fixsternhimmel besitzen müßte, wenn er sich in 24 Stunden um die Erde drehte. Andererseits sind aber wieder gegen die copernicanische Theorie viele sehr schwerwiegende Einwände erhoben worden, die bei dem damaligen Stande der Wissenschaft geradezu als unwiderlegbar gelten mußten; man wies z. B. darauf hin, daß ja doch ein von einem Turme herabfallender Stein immer am Fuße des Turmes ankomme; und dies war gewiß eine Tatsache, die, solange die Physiker nichts von dem Beharrungsvermögen wußten, mit der Annahme einer Eigenbewegung der Erde unvereinbar erscheinen mußte.[1] Der ärgste Mangel der copernicanischen Theorie, der vor allem das ablehnende Verhalten der hervorragendsten Astronomen rechtfertigte, war aber ihre tatsächliche Unzulänglichkeit gegenüber den genaueren astronomischen Beobachtungen — eine Unzulänglichkeit, die um so deutlicher hervortreten mußte, seitdem durch Tycho Brahe die astronomische Meßkunst eine so großartige Vervollkommnung und das astronomische Beobachtungsmaterial eine so ungeheure Vermehrung erfahren hatte.

Es erwies sich als unmöglich, die tatsächlichen Beobachtungen auf Grund der Annahme zu erklären, daß die Planeten um die Sonne kreisförmige Bahnen beschreiben, und diese Unmöglichkeit bewog Tycho, ein neues System aufzustellen, das eine Verschmelzung des copernicanischen mit dem ptolemaeischen System darstellte, und das im Grunde wiederum auf epizyklische Bewegungen führte. Tycho ließ nämlich die Erde ruhen[2] und um die Erde in einfachen Kreisen sich Sonne und Mond bewegen und erst um die Sonne die fünf damals bekannten Pla-

[1] Die Unrichtigkeit dieses Einwandes erwies auf experimentellem Wege erst Gassendi durch seine berühmten Versuche im Hafen von Marseille, bei denen er auf rasch bewegten Schiffen Steine von der Spitze des Mastes herabfallen ließ (Gassendi, De motu impresso a motore translato, 1649).

[2] Möglicherweise haben wohl bei der Aufstellung dieser Theorie neben sachlichen Gründen auch religiöse Rücksichten eine Rolle gespielt. Die tychonische Theorie zeigt übrigens eine gewisse Verwandtschaft mit dem sogenannten ägyptischen System des Altertums, dessen Ursprung man fälschlich nach Ägypten verlegte, das

neten kreisen. Tychos großer Schüler Johannes Kepler erkannte aber nun, als er nach dem Tode seines Lehrers dessen Beobachtungen über die Bahn des Mars überprüfte, daß sich die Bewegung dieses Planeten weder mit der copernicanischen noch mit der tychonischen Theorie in Einklang bringen ließ.

Die Schwierigkeiten schienen fast unüberwindlich, als Kepler auf den glücklichen, für die damalige Zeit aber wohl durchaus revolutionären Gedanken kam, die Vorstellung, die bis dahin die Astronomie beherrscht hatte, fallen zu lassen, die Vorstellung nämlich, daß die Planetenbewegungen nur durch gleichförmige Kreisbewegungen erklärt werden könnten. Daß Kepler diesen kühnen Schritt gegen ein Jahrtausende altes und so tief eingewurzeltes Vorurteil wagte, das bedeutet, wenn auch vielleicht nicht für die gesamte Weltanschauung, aber doch jedenfalls für die Himmelsmechanik eine ebenso große Tat, wie der Ersatz der geozentrischen Hypothese durch die heliozentrische.

Da Kepler im übrigen ein begeisterter Anhänger der heliozentrischen Idee war, so entstand für ihn zunächst das Problem, die genaue geometrische Gestalt der Bahn zu ermitteln, die der Mars um die Sonne beschreibt. Nachdem Kepler mehrere Annahmen versucht hatte, ohne jedoch bei der tatsächlichen Durchrechnung zu dem gewünschten Ziele zu gelangen, kam er schließlich auf den glücklichen Einfall, die Bahn des Mars als Ellipse anzusehen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet; und als Kepler auf Grund dieser Annahme seine Rechnungen wiederholte, da glückte es ihm in der Tat, eine völlige Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung zu erzielen. Ja, die Übereinstimmung war derart ausgezeichnet, daß Kepler das bei dem Planeten Mars gewonnene Resultat auf alle Planeten ausdehnte und so zu seinem berühmten Gesetze gelangte, demzufolge die Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet.

Mit diesem sogenannten zweiten Gesetze verband Kepler noch eines, das gewöhnlich als das erste Keplersche Gesetz bezeichnet wird (bisweilen ist aber auch die Benennung der beiden Gesetze gerade umgekehrt), und das in anderer Form schon in der Astronomie Tychos eine Rolle gespielt hatte, das also Kepler nur aus der Sprache der tychonischen Theorie in die seine zu übersetzen brauchte. Dieses Gesetz bezieht sich auf die augenblickliche Bahngeschwindigkeit der Planeten und bringt sie in eine Beziehung zu der jeweiligen Entfernung des Planeten von der Sonne. Das erste Keplersche Gesetz lehrt nämlich, daß die Radienvektoren, die man von dem Planeten zu der

---

aber wahrscheinlich von einem Schüler Platons stammte und das auch Copernicus aus einem spätrömischen Sammelschriftsteller, Martianus Capella, kennen gelernt hatte. Im ägyptischen System erscheinen nämlich Mercur und Venus nicht als selbständige Planeten, sondern als Trabanten der Sonne, die ihrerseits wieder einen „Wandelstern" darstellt.

Sonne zieht, in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchstreichen. Je weiter also der Planet in seiner Bahn von der Sonne entfernt ist, desto langsamer muß er sich bewegen und umgekehrt, so daß also die Bewegung des Planeten stets am raschesten im Perihel und am langsamsten im Aphel erfolgt (Fig. 28). Die augenblickliche Geschwindigkeit des Planeten ist also (da ja der doppelte Flächeninhalt eines Dreieckes gleich ist dem Produkte aus Basis und Höhe) stets umgekehrt proportional der Länge des Lotes, das man von der Sonne auf die Richtung der jeweiligen Bahntangente fällt.

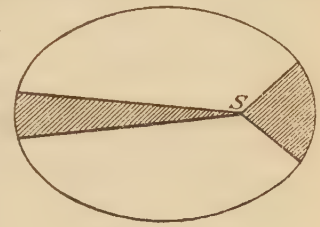

Fig. 28.

Das erste und zweite Gesetz teilte Kepler in seiner 1609 erschienenen „Astronomia nova" mit[1]; sein zweites großes astronomisches Hauptwerk, die 1619 veröffentlichte „Harmonik des Weltalls" (Harmonice mundi) brachte dann das berühmte dritte Gesetz. Kepler hatte schon in einem sehr phantastischen Jugendwerke, dem „Mysterium cosmographicum", es versucht, ein Gesetz für die Entfernungen der Planeten von der Sonne aufzustellen; seine damaligen Untersuchungen gründeten sich auf die Vermutung, daß die Zahlenverhältnisse, die zwischen den fünf regulären Körpern und den ihnen ein- und umgeschriebenen Kugeln bestehen, auch in den Distanzen der Planeten von der Sonne eine Rolle spielen müßten. Kepler hielt an den phantastischen Vorstellungen seines Jugendwerkes später wohl kaum fest, aber der Gedanke, daß ein oberstes Gesetz die Radien der Planetenbahnen miteinander verknüpfen müsse, hörte nie auf, ihn zu beschäftigen. Nur verfuhr Kepler im reiferen Alter viel wissenschaftlicher als in seiner Jugend. Er erweiterte das Problem, das sich ursprünglich nur auf den zahlenmäßigen Zusammenhang zwischen den für das Planetensystem charakteristischen Raumgrößen bezogen hatte, dahin, daß er nunmehr einen Zusammenhang zwischen diesen Raumgrößen und den bei der Planetenbewegung eine Rolle spielenden Zeitgrößen suchte. Er trachtete darum, eine gesetzmäßige Beziehung zwischen den Radien der Planetenbahnen und ihren Umlaufszeiten zu ermitteln. Da jedenfalls, wie er sogleich erkannte, eine direkte Proportionalität zwischen T und r nicht besteht, so kam nun Kepler auf den glücklichen Gedanken, eine solche Proportionalität zwischen T und einer bestimmten Potenz von r zu suchen; und da endlich nach jahrzehntelangen vergeblichen Bemühungen glückte ihm die wunderbare Erkenntnis, daß es, wie er sagt, „eine völlig sichere und mit der größten Genauigkeit erfüllte Beziehung sei, daß das Verhältnis, das zwischen den Umlaufszeiten zweier beliebiger Planeten besteht, genau gleich ist dem zur einundeinhalbten Potenz

[1] Astronomia nova, pars IV, cap. 59 (vgl. auch cap. 32).

erhobenen Verhältnis der mittleren Entfernungen von der Sonne."[1] Es gilt also nach Kepler die Beziehung

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} \tag{1}$$

oder wie man das Gesetz gewöhnlich ausspricht: Es verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten so wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.

[1] Harmonice mundi, lib. V, cap. III (der mit „Octavo" beginnende Abschnitt): Sed res est certissima exactissimaque, quod proportio, quae est inter binorum quorumcunque planetarum tempora periodica, sit praecise sesquialtera proportionis mediarum distantiarum.

Zehnte Vorlesung.

Das Gravitationsprinzip.

Die von Kepler aufgefundenen Gesetze der Himmelsmechanik reichen vollständig aus, um die Bewegungen der Planeten zu beschreiben. Denn kennen wir die Form und die Lage der Planetenbahnen (wozu die Angaben der Länge der großen Achse, der Exzentrizität und der Lage des Mittelpunktes in bezug auf die Sonne genügen); wissen wir ferner von jedem Planeten, wo er sich zu irgend einer Zeit in seiner Bahn befand und kennen wir von einem einzigen Planeten die Umlaufszeit, so können wir, sobald uns diese Konstanten gegeben sind, auf Grund der drei Keplerschen Gesetze für jeden Planeten seine Lage zu irgend einer Zeit angeben. Es muß also auch (ohne daß Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit gegeben zu sein brauchen) möglich sein, auf Grund der Keplerschen Gesetze für jede Stelle der Bahn eines Planeten seine Geschwindigkeitsänderung und damit die auf ihn wirkende Kraft zu berechnen.

Daß von der Sonne auf die Planeten Kräfte ausgeübt werden, hat bereits Kepler vermutet. Er hatte schon die Vorstellung einer universellen Gravitation, die er in Anlehnung an einen sehr alten, zuerst von Platon[1] ausgebildeten und auch bei Copernicus wiederkehrenden Gedanken als Vereinigungsbestreben verwandter Körper auffaßte, und er erkannte auch, daß nur der rasche Umschwung die verwandten Himmelskörper, wie die Erde und den Mond, an der Vereinigung verhindern könne.[2] Wir begegnen indessen nirgends bei Kepler dem Versuche, aus dieser universellen Gravitation die Bewegungen der Planeten zu erklären — ein Versuch, der ja im übrigen von vorneherein völlig aussichtslos bleiben mußte, solange keine klare Erkenntnis des Beharrungsvermögens vorhanden war.

Aus diesem Grunde erklärten auch bis über die Zeit Keplers hinaus die Naturforscher gewöhnlich die Bewegung des Planetensystems durch

---

[1] Platon, Timaios 52.

[2] Kepler, Astronomia nova; vgl. F. Rosenberger, Isaac Newton und seine physikalischen Prinzipien (Leipzig 1895), 2. Teil, 2. Kap. Die Entwicklung der Gravitationstheorien vor Newton.

die Rotation eines Zentralkörpers, der die mit ihm durch Kräfte[1] oder mechanische Zusammenhänge[2] verbundenen Planeten infolge seiner eigenen Drehung mitführe. Es bedeutete darum einen außerordentlichen Fortschritt in der Entwicklung der Himmelsmechanik, als im Jahre 1666 in seinem berühmten Werke über die Jupitertrabanten[3] der italienische Physiker Borelli in freilich noch recht unklarer Weise auf die Möglichkeit hinwies, die Bewegungen der Planeten durch das Zusammenwirken einer von der Sonne ausgehenden Anziehungskraft und des Beharrungsvermögens der Planeten zu erklären (falls man sich diese mit einer Anfangsgeschwindigkeit begabt denkt).

Diese von Borelli eigentlich nur angedeutete Idee suchten dann bald darauf insbesondere zwei englische Physiker durchzuführen, nämlich Hooke und Halley. Hooke war fest davon überzeugt, daß man die Bewegungen der Planeten vollständig aus der Annahme einer von der Sonne ausgehenden Kraft erklären könne, die um so stärker sei, in je geringerer Entfernung von der Sonne sie zur Geltung komme;[4] aber es gelang Hooke nicht, das genaue Gesetz aufzufinden, das diese jedenfalls mit der Entfernung abnehmende Kraft befolgt.[5]

Halley wiederum vermutete, daß aus dem dritten Keplerschen Gesetze folgen müsse, daß die von der Sonne auf die Planeten ausgeübte Kraft im umgekehrt quadratischen Verhältnisse mit der Entfernung abnehme, und er versuchte es auch bereits, auf Grund dieser Annahme die Bahnen der Planeten zu bestimmen, ohne daß es ihm jedoch gelungen wäre, der großen mathematischen Schwierigkeiten, auf die er dabei stieß, Herr zu werden.

Wenn uns also auch die Idee einer universellen Gravitation bereits bei Kepler begegnet, wenn auch die Annahme nicht neu war, daß sich die Planetenbewegungen aus einem einzigen Kraftgesetze erklären lassen müßten, so gebührt doch Newton das unleugbare große Verdienst, daß er zuerst an die Stelle vager Vermutungen unwiderlegbare Beweisführungen setzte; daß er in exakter Weise zeigte, wie sich die verwickeltesten Himmelserscheinungen als streng mathematisch ableitbare Folgerungen aus einem einzigen physikalischen

---

[1] Diese Kräfte sah man im 16. Jahrhundert meist als magnetische an; diese Auffassung begegnet uns z. B. bei Gilbert, bei Kepler selbst, bei Galilei und bei Guericke. Vgl. S. Günther, „Johannes Kepler und der tellurisch-kosmische Magnetismus" in „Geographische Abhandlungen", herausgegeben von Penck (Verlag Teubner) 1. Bd. 2. Heft.

[2] Wie z. B. in der Kosmologie des Descartes.

[3] Borelli, Theoria Mediceorum planetarum ex causis physicis deducta (Florenz 1666), p. 47. „Mediceische Sterne" hatte die Jupitertrabanten zu Ehren des Hauses Medici Galilei getauft.

[4] Hooke, „An attempt to prove the motion of the earth" (London 1674).

[5] Hooke behauptete zwar, vor Newton ein allgemeines Gravitationsgesetz gefunden zu haben und aus ihm die Keplerschen Gesetze deduziert zu haben; doch erscheinen seine diesbezüglichen Äußerungen keineswegs glaubwürdig.

Gesetze, dem von ihm zuerst klar formulierten Gravitationsgesetze ergeben; daß er schließlich durch eine genau stimmende Rechnung nachwies, daß auch die irdische Schwere nur einen Spezialfall der allgemeinen Massenanziehung darstellt.

Die auf das Gravitationsprinzip bezüglichen Untersuchungen hat Newton zuerst in seinem großen Lehrbuche der theoretischen Physik, in den „Mathematischen Prinzipien der Naturlehre" mitgeteilt, die, wie schon erwähnt, im Jahre 1687 in drei Büchern erschienen; und zwar behandelte Newton im Rahmen des ersten Buches die mit den Keplerschen Gesetzen zusammenhängenden Theoreme von rein mechanischen Gesichtspunkten aus, während er erst im dritten Buche auf Grund dieser Theoreme zu astronomischen Folgerungen überging.

Newton zeigte zunächst im ersten Buche der „Mathematischen Prinzipien", daß jede Bewegung, die unter dem Einflusse einer stets nach einem bestimmten Punkte gerichteten Kraft erfolgt, derart beschaffen ist, daß der zu dem festen Punkte von dem bewegten Körper gezogene Radiusvektor stets in der gleichen Ebene bleibt und immer in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt[1] (ein Prinzip, von dem in einer späteren Vorlesung noch ausführlich die Rede sein wird). Aus diesem Gesetze gewinnt dann Newton die Umkehrung, daß jede Bewegung, bei der ein nach einem bestimmten Punkte gezogener Radiusvektor in einer und derselben Ebene der Zeit proportionale Flächen durchstreicht, von einer Kraft beherrscht wird, die immer nach dem betreffenden Punkte gerichtet ist.[2] Da dies bei den Planeten nach dem ersten Keplerschen Gesetze der Fall ist, so folgt daraus, daß die Kraft, die die Planetenbewegungen bewirkt, nach der Sonne gerichtet sein muß.[3]

Welches Gesetz diese Kraft befolgt, kann man aber nun, wenn auch nicht völlig exakt, so doch mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit aus dem dritten Keplerschen Gesetze erschließen, wenn man berücksichtigt, daß die Bahnen der Planeten ja nur wenig von der Kreisform abweichen. Denn betrachten wir mit Newton[4] mehrere Körper, die sich in konzentrischen Kreisen mit beliebigen, aber konstanten Geschwindigkeiten bewegen, so müssen nach dem früher Gesagten diese Bewegungen durch Kräfte hervorgerufen werden, die nach dem gemeinschaftlichen Zentrum gerichtet sind; diese Kräfte müssen aber wiederum, wie aus den Huygensschen Sätzen über die Zentrifugalkraft folgt, den Radien direkt und den Quadraten der Umlaufszeiten umgekehrt proportional sein.[5] Sind nun die Bewegungen der Körper derart beschaffen,

[1] Philosophiae naturalis principia mathematica, lib. I, sect. II, prop. 1, theor. 1.
[2] Princ. math., lib. I, sect. II, prop. 2, theor. 2.
[3] Princ. math., lib. III, phaenom. 5 und prop. 2.
[4] Princ. math., lib. I, sect. II, prop. 4, theor. 4.
[5] Nach der bekannten Formel für die Zentrifugalkraft

$$K = \frac{4 m r \pi^2}{T^2}.$$

daß sich die Quadrate ihrer Umlaufszeiten wiederum so verhalten wie die dritten Potenzen ihrer Radien, so müssen die Kräfte, die auf die verschiedenen Körper wirken, den Quadraten der Radien umgekehrt proportional sein.[1]

Es bedurfte also in der Tat nur eines recht einfachen Schlusses, um von dem dritten Keplerschen Gesetze unter Benutzung der Huygensschen Erkenntnisse zu dem richtigen Gesetze der Planetenkraft hingeleitet zu werden. In der Tat sind ja aber nun die Planetenbahnen keine Kreise, sondern Ellipsen, und die Sonne nimmt in bezug auf sie eine exzentrische Lage ein. Daß aber trotz der ungenauen Voraussetzungen das vorhin abgeleitete Resultat ein völlig genaues ist, das geht aus einem ungemein bedeutungsvollen, von Newton entdeckten mechanischen Gesetze hervor, das sich auf eine elliptische Bewegung bezieht, bei der der nach dem einen Brennpunkte gezogene Radiusvektor der Zeit proportionale Flächen durchstreicht. Für eine solche Bewegung gilt, wie Newton durch zwei verschiedene exakt-geometrische Beweise zeigte, das Gesetz, daß die Kraft, die nach dem früher Gesagten zum Brennpunkte gerichtet sein muß, dem Quadrate der jeweiligen Entfernung des Körpers von dem Brennpunkte umgekehrt proportional ist.[2]

Die allerdings nicht exakt durchgeführte Umkehrung dieses Gesetzes und zweier analoger, die sich auf die Bewegungen in einer Parabel und in einer Hyperbel beziehen, ergibt dann bei Newton den Satz, daß die Bewegung eines Körpers, der sich mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit unter dem Einflusse einer Kraft bewegt, die nach einem bestimmten Punkte gerichtet und dem Quadrate der Entfernung von diesem Punkte umgekehrt proportional ist, in einem Kegelschnitte erfolgt, und zwar je nach der Beziehung zwischen Anfangsgeschwindigkeit und Anfangskraft eben in einer Ellipse (unter besonderen Umständen auch in einem Kreise), in einer Parabel oder in einer Hyperbel.[3]

Aus diesem Gesetze leitete dann Newton wiederum einen wichtigen Satz ab, der sich auf den Fall bezieht, daß sich mehrere Körper unter dem Einflusse einer im umgekehrt quadratischen Verhältnisse mit der Entfernung abnehmenden Kraft in Ellipsen um dasselbe Zentrum als gemeinschaftlichen Brennpunkt bewegen. Dann verhalten sich, wie Newton nachweist, die Parameter der einzelnen Ellipsen (d. h. die in den Brennpunkten normal zur Hauptachse errichteten Sehnen) ebenso wie die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten, die die einzelnen Körper in bezug auf das gemeinschaftliche Zentrum besitzen. Nennen wir die großen Achsen der Ellipsen a, die kleinen b, so ist der

[1] Princ. math., lib. I, sect. II, prop. 4, theor. 4, coroll. 6.

[2] Princ. math., lib. I, sect. III, prop. 11, probl. 6 und lib. III, phaenom. 4 und prop. 2.

[3] Princ. math., lib. I, sect. III, prop. 14, theor. 6.

Parameter nach einem bekannten elementaren Satze der Geometrie gleich $\frac{b^2}{a}$; die Flächengeschwindigkeit (d. h. die in der Zeiteinheit vom Radiusvektor durchstrichene Fläche) sei $\frac{1}{2}C$. Es gilt dann, wie Newton exakt-geometrisch beweist, die Proportion

$$\frac{b_1^2}{a_1} : \frac{b_2^2}{a_2} = C_1^2 : C_2^2. \tag{1}$$

Andererseits muß die Fläche einer Ellipse gleich sein dem Produkte aus der Flächengeschwindigkeit und der Umlaufszeit; es muß also sein

$$a\,b\,\pi = \tfrac{1}{2}C \cdot T. \tag{2}$$

Setzen wir aus dieser Gleichung die Werte für C_1 und C_2 in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir die Proportion

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3. \tag{3}$$

Es verhalten sich also bei den Körpern, die sich mit konstanten Flächengeschwindigkeiten in Ellipsen um einen gemeinschaftlichen Brennpunkt bewegen, tatsächlich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der großen Achsen, falls auf die Körper eine einheitliche Kraft einwirkt, die dem Quadrate der Entfernung von dem gemeinschaftlichen Zentrum umgekehrt proportional ist.[1]

Auf Grund aller der erwähnten mechanischen Sätze hielt sich nun Newton zu dem so ungemein bedeutungsvollen Schlusse berechtigt, daß, wie er sagte, „die Kräfte, durch die die Planeten beständig von der geradlinigen Bewegung abgezogen und in ihren Bahnen erhalten werden, nach der Sonne gerichtet und den Quadraten der Abstände von der Sonne umgekehrt proportional sind".[2]

Ein direkter und vollkommener Beweis des Gravitationsprinzipes ist nun Newton keinesfalls gelungen. Er konnte weder in vollständiger Weise zeigen, daß sich aus den empirischen Keplerschen Gesetzen mit Notwendigkeit das Gravitationsprinzip ergibt, noch auch umgekehrt aus dem Gravitationsprinzip alle Keplerschen Gesetze ableiten. Newton hat für jeden der beiden entgegengesetzt gerichteten Beweise nur Bruchstücke geliefert. Denn das Gravitationsgesetz besteht eigentlich aus drei Teilen, die den drei Keplerschen Gesetzen entsprechen. Der erste Teil lehrt, daß die Attraktion zur Sonne gerichtet ist, der zweite, daß die Kraft, die auf einen bestimmten einzelnen Planeten in seiner elliptischen Bahn ausgeübt wird, umgekehrt proportional ist dem Quadrate der jeweiligen Entfernung von der Sonne

---

[1] Princ. math., lib. I, sect. III, prop. 15, theor. 7.

[2] Princ. math., lib. III, prop. 2, theor. 2: Vires quibus planetae primarii perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis et in orbibus suis retinentur, respicere solem, et esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

(die ja eben z. B. im Aphel eine andere ist als im Perihel). Der dritte Teil des Gravitationsprinzipes lehrt schließlich, daß die Beschleunigungen, die durch die Attraktion seitens der Sonne in einem bestimmten Augenblicke zwei verschiedene Planeten erfahren, sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernungen, die in dem betreffenden Augenblicke die beiden Planeten von der Sonne haben.

Newton hat nun, wie wir sahen, aus dem ersten Keplerschen Gesetze den ersten Teil des Gravitationsprinzipes deduziert und umgekehrt aus dem Gravitationsprinzipe das erste Keplersche Gesetz abgeleitet. Er hat gezeigt, daß sich aus dem dritten Keplerschen Gesetze der dritte Teil des Gravitationsprinzipes ergeben müßte, wenn die Planetenbahnen Kreise wären. Aus dem zweiten Keplerschen Gesetze hat Newton in vollkommen exakter Weise den zweiten Teil des Gravitationsprinzipes abgeleitet; aber die Umkehrung, die er hierfür gab, war (worauf hier nicht näher eingegangen werden soll[1]) alles eher als exakt. Schließlich konnte Newton, wie wir sahen, zeigen, daß, wenn das erste und zweite Keplersche Gesetz erfüllt sind, dann aus dem Gravitationsprinzipe notwendigerweise auch das dritte Keplersche Gesetz folgt.

Das war alles, was Newton über den Zusammenhang zwischen den Keplerschen Gesetzen und seinem Gravitationsprinzipe in exakter Weise vorzubringen wußte; weiter reichte seine Macht nicht; denn er geriet in der Tat auf Schwierigkeiten, die er unter Benutzung der von ihm streng befolgten synthetischen Methode nicht zu überwinden vermochte. Die vollständige Durchführung des von Newton nur fragmentarisch gegebenen Beweises ist erst auf analytischem Wege dem unsterblichen Schöpfer der „Mécanique céleste", ist erst Laplace gelungen, dessen Gedankengange[2] wir uns im folgenden im wesentlichen anschließen wollen.

Um also aus den Keplerschen Gesetzen das Gravitationsprinzip zu deduzieren (wir wollen uns hierauf beschränken, obwohl Laplace auch umgekehrt aus dem Gravitationsprinzipe die Keplerschen Gesetze abgeleitet hat), gehen wir mit Laplace von den Gleichungen aus, die die freie und ebene Bewegung eines materiellen Punktes in Polarkoordinaten beschreiben. Diese zuerst von Euler aufgestellten Gleichungen lauten, wie wir in einer früheren Vorlesung[3] sahen,

$$(4) \qquad \begin{cases} b_r = \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r \cdot \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2, \\ b_\varphi = 2\dfrac{dr}{dt} \cdot \dfrac{d\varphi}{dt} + r \cdot \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}. \end{cases}$$

Hierbei ist unter b_r die Komponente der Beschleunigung zu verstehen,

[1] Vgl. F. Rosenberger, Isaac Newton (Leipzig 1895), S. 183.
[2] Laplace, Mécanique céleste, lib. II, chap. I.
[3] Vgl. Vorlesung 8, Gleichungen (16).

die in die Richtung von r fällt und unter b_φ die hierzu senkrechte Komponente, und zwar sollen beide Komponenten in den Richtungen positiv gerechnet werden, in denen die Koordinaten r und φ zunehmen.

Diese Gleichungen gelten natürlich auch für die Bewegungen eines Planeten, wobei wir das Koordinatensystem zweckmäßig so legen werden, daß sein Ursprung in die Sonne fällt und seine Nullrichtung durch die Gerade festgelegt ist, die die Sonne mit dem Perihel verbindet. Es wird sich vor allem nun darum handeln, einen analytischen Ausdruck für das erste und zweite Keplersche Gesetz zu finden, die uns ja die Bewegung des Planeten vollständig beschreiben; zunächst also für das erste Gesetz, das die Konstanz der Flächengeschwindigkeit lehrt. Nun ist ja die in der Zeit dt zurückgelegte Fläche durch ein Dreieck dargestellt, das wir als gleichschenklig ansehen können[1] und dessen Scheitelwinkel $d\varphi$ ist (vgl. Fig. 27). Es ist also die in dem Zeitelemente dt zurückgelegte Fläche durch die Größe $\frac{1}{2}r^2\,d\varphi$ gegeben, und wir können somit, wenn wir die für unseren Planeten konstante Flächengeschwindigkeit mit $\frac{C}{2}$ bezeichnen, das erste Keplersche Gesetz analytisch durch die Formel darstellen

$$r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C. \tag{5}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung erhalten wir

$$2r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

und hieraus folgt, wenn wir diese Gleichung noch durch r dividieren, sogleich

$$b_\varphi = 0. \tag{6}$$

Das Verschwinden der Beschleunigungskomponente, die zu b_r senkrecht steht, bedeutet aber nichts anderes, als daß die Beschleunigung des Planeten stets zu der Sonne gerichtet ist.

Das zweite Keplersche Gesetz findet seinen analytischen Ausdruck in der Gleichung einer Ellipse, deren Brennpunkt sich im Koordinatenursprung befindet und deren große Achse die Nullrichtung hat; diese Gleichung lautet bekanntlich

$$r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}, \tag{7}$$

wobei a die große Achse der Ellipse bedeutet, b die kleine Achse und e die Exzentrizität (die aber natürlich durch die Werte von a und b bereits gegeben ist).

[1] Da die beiden Schenkel r und $r + dr$ in ihrer Länge nur unendlich wenig verschieden sind.

Um nun die Normalbeschleunigung b_r zu berechnen, die nach dem früher Gesagten zugleich die gesamte Beschleunigung darstellt, verfahren wir am zweckmäßigsten derart, daß wir zunächst die Ellipsengleichung nach der Zeit differentiieren; wir erhalten dann

$$\frac{dr}{dt} = \frac{b^2 \cdot e \cdot \sin\varphi}{(a + e \cdot \cos\varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Hierfür können wir aber unter Benutzung der Ellipsengleichung (7) auch schreiben

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r^2}{b^2} \cdot e \cdot \sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

und hierfür wieder unter Benutzung des in der Gleichung (5) ausgedrückten Keplerschen Gesetzes

$$\frac{dr}{dt} = \frac{e \cdot C}{b^2} \cdot \sin\varphi. \tag{8}$$

Diese Gleichung haben wir, da ja in den Formeln (4) für die Beschleunigung der zweite Differentialquotient von r nach der Zeit vorkommt, nochmals zu differentiieren; wir erhalten dann

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{eC}{b^2} \cdot \cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

oder unter abermaliger Benutzung der Formel (5)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{eC^2}{b^2 r^2} \cdot \cos\varphi. \tag{9}$$

Formen wir in analoger Weise in der Formel (4) für die Normalbeschleunigung b_r auch das zweite Glied mittels des ersten Keplerschen Gesetzes um, so erhalten wir schließlich für die Normalbeschleunigung

$$b_r = \frac{eC^2}{b^2 r^2} \cdot \cos\varphi - \frac{C^2}{r^3}$$

oder, wenn wir $\frac{C^2}{r^2}$ herausheben und bei dem zweiten Glied dann für $\frac{1}{r}$ den Wert einsetzen, der sich aus der Ellipsengleichung ergibt,

$$b_r = \frac{C^2}{r^2}\left(\frac{e}{b^2}\cos\varphi - \frac{a + e\cos\varphi}{b^2}\right)$$

oder

$$b_r = -\frac{aC^2}{b^2 r^2}. \tag{10}$$

In diese Formel wollen wir nun noch die Umlaufszeit einführen, was wir am einfachsten mittels der schon erwähnten Relation tun, daß der gesamte Flächeninhalt der Ellipse gleich sein muß dem Produkte aus der Umlaufszeit und der Flächengeschwindigkeit, daß also

$$ab\pi = T \cdot \frac{C}{2}.$$

Wir erhalten dann für die Beschleunigung, indem wir die Konstante C durch die Umlaufszeit ausdrücken

$$b_r = -\frac{4a^3\pi^2}{r^2 T^2}. \tag{11}$$

Diese Formel ergibt sich auf rein rechnerischem Wege durch Zusammenfassung des ersten und zweiten Keplerschen Gesetzes, und man erkennt sogleich, welch außerordentliche Vereinfachung diese Formel erfährt, wenn man nun noch das dritte Keplersche Gesetz heranzieht, demzufolge ja für alle Planeten das Verhältnis von a^3 zu T^2 denselben Wert haben muß, den wir C' nennen wollen. Es verschwinden dann aus der Formel für die Beschleunigung alle für den betreffenden Planeten charakteristischen individuellen Konstanten und es ergibt sich das universelle Gesetz

$$b_r = -\frac{4\pi^2 C'}{r^2}, \tag{12}$$

demzufolge die immer gegen die Sonne gerichtete Beschleunigung eines beliebigen Planeten ganz unabhängig ist von allen besonderen Eigenschaften dieses Planeten, vielmehr stets nur eine Funktion der Entfernung von der Sonne und dieser Entfernung in umgekehrt quadratischem Verhältnisse proportional ist.

Newton, der dieses von Laplace nur exakter bewiesene Resultat ja bereits gewonnen hatte, fand nun auf Grund von astronomischen Beobachtungen, daß das Gesetz, nach dem die Sonne die Planeten anzieht, auch für die Kraft gelten muß, durch die die Trabanten des Jupiter und des Saturn in ihren Bahnen um diese Planeten erhalten werden.[1] Schließlich konnte Newton auch zeigen — ja diese Entdeckung scheint den eigentlichen Ausgangspunkt seiner Theorie gebildet zu haben — daß man die Kraft, die den Mond in seiner Bahn um die Erde erhält, mit der Kraft identifizieren kann, die den Fall der schweren Körper auf der Erdoberfläche hervorruft, wofern man eben annimmt, daß diese einheitliche Kraft im umgekehrt quadratischen Verhältnisse mit der Entfernung von dem Erdmittelpunkte abnimmt.

Denn wenn dies der Fall ist, so muß die Beschleunigung, die diese Kraft in der Entfernung des Mondes hervorbringt, 60^2mal kleiner sein als die Beschleunigung auf der Erdoberfläche, weil ja die (mittlere) Entfernung des Mondes von der Erde 60 Erdradien beträgt; und in der Tat fand Newton, daß die auf Grund der Huygensschen Sätze über die Zentrifugalkraft berechnete Beschleunigung des Mondes gegen die Erde 3600 mal kleiner ist als die Beschleunigung des freien Falles.[2]

[1] Princ. math., lib. III, phaenom. 1 und 2 und prop. 1, theor. 1.
[2] Princ. math., lib. III, prop. 4, theor. 4.

Newton hielt somit den Schluß für gerechtfertigt, daß die Kräfte, die die Sonne auf die Planeten, die der Jupiter und der Saturn auf ihre Trabanten, die die Erde auf den Mond und auf die Körper auf ihrer Oberfläche ausübt — daß alle diese Kräfte untereinander durchaus wesensgleich sind, daß sie alle nur Spezialfälle einer universellen Gravitation darstellen, die von jeder beliebigen Masse des Weltalls auf jede beliebige andere ausgeübt wird.[1]

Nun zeigen ja die Erscheinungen der irdischen Schwere, daß alle Körper mit gleicher Beschleunigung fallen, daß somit ihre Gewichte ihren Massen genau proportional sind; ebenso zeigt es sich ja auch, daß die Zentripetalbeschleunigung, die in irgend einer bestimmten Entfernung die Sonne an einer Masse hervorbringt, unabhängig ist von dieser Masse selbst [vgl. Formel (12) dieser Vorlesung]. Es erscheint daher Newton die Annahme gerechtfertigt, daß alle Körper gegeneinander im Verhältnisse ihrer Massen schwer sind[2], daß man also die träge und die gravitierende Masse identifizieren darf. Es muß also die Beschleunigung, die eine Masse m_1 an einer zweiten Masse m_2 hervorbringt, unabhängig sein von der Größe m_2, und ebenso muß die Beschleunigung, die die Masse m_2 an der Masse m_1 hervorruft, unabhängig sein von der Größe m_1.

Nennen wir also die Kraft, die auf die Masse m_1 die Masse m_2 ausübt, K_1 und die Kraft, die auf die Masse m_2 die Masse m_1 ausübt, K_2, so muß nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetze sein

$$K_1 = \frac{m_1 \gamma_1}{r^2}$$

und

$$K_2 = \frac{m_2 \gamma_2}{r^2},$$

wobei γ_1 von m_1 und γ_2 von m_2 unabhängig sein muß. Andererseits müssen wieder nach dem dritten Newtonschen Bewegungsgesetze die absoluten Beträge von K_1 und K_2 gleich groß sein. Man erkennt leicht, daß diese Forderungen erfüllt sind, wenn man die Gravitation zwischen den beiden Massen ihrem absoluten Betrage K nach gleich setzt

$$K = \varkappa \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{13}$$

wobei $\varkappa$ eine von beiden Massen und ihrer Entfernung unabhängige universelle Konstante darstellt, die man eben als die Gravitationskonstante[3] bezeichnet; und diese Form des universellen Gravitations-

[1] Princ. math., lib. III, III. regula philosophandi.

[2] Princ. math., lib. III, prop. 7, theor. 7: Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiae in singulis.

[3] Der Wert der Gravitationskonstante beträgt bekanntlich $6{\cdot}66 \,.\, 10^{-8}$ g^{-1} cm^3 sec^{-2}; sie wurde in exakter Weise zuerst 1798 von Cavendish mittels der Drehwage bestimmt.

gesetzes entspricht auch ganz der Auffassung, daß die gegenseitige Anziehung zweier Körper daher rührt, daß jeder einzelne Materieteil in dem einen Körper gegen jeden einzelnen Materieteil in dem zweiten Körper gravitiert und umgekehrt[1], so daß also dann natürlich die gesamte Attraktion dem Produkte der beiden Massen proportional sein muß.

[1] Diese Auffassung steht, wie Newton zeigte, nicht in Widerspruch mit der Annahme, daß die von der Erde ausgeübte Kraft von ihrem Mittelpunkte ausgeht. Denn die von einer Kugel auf einen außerhalb liegenden Punkt ausgeübte Attraktion ist, wie bereits Newton bewies, ebenso groß, wie wenn die ganze Masse der Kugel in ihrem Zentrum vereinigt wäre (Princ. math., lib. I, sect. XII, prop. 71, theor. 31).

Elfte Vorlesung.

Das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunktes.

Während unsere bisherigen Betrachtungen der Dynamik eines einzelnen freien Massenpunktes gegolten haben[1], wollen wir nun zu Systemen von beliebig vielen freien Massenpunkten übergehen und wollen uns darum zunächst mit den Prinzipien befassen, die die Möglichkeit bieten, das komplizierte Problem der Bewegung eines Systems in gewissem Sinne auf die einfachere Aufgabe der Bewegung eines einzelnen freien Massenpunktes zurückzuführen.

Wie immer nun auch ein System beschaffen sein mag, von welcher Art auch immer die Kräfte sein mögen, die an den zu ihm gehörigen n Massen angreifen, so werden wir doch jedenfalls stets $3n$ Bewegungsgleichungen aufstellen können, die die zweiten zeitlichen Differentialquotienten der Koordinaten der Massenpunkte in einen Zusammenhang bringen mit den auf die einzelnen Massen wirkenden Kräften; falls aber nun zwischen den einzelnen Massen Kräfte wirken, die von deren gegenseitigen Entfernungen abhängen, so wird die gesamte Kraft, die in einem einzelnen Massenpunkte angreift, im allgemeinen eine Funktion sämtlicher $3n$ Koordinaten des Systems sein.

Wenn also auch die Aufstellung der Differentialgleichungen — die von der zweiten Ordnung sein werden und in denen, falls wir ideale dynamische Prozesse betrachten, Differentialquotienten der ersten Ordnung nicht vorkommen — keine besondere Schwierigkeit bereitet, so stellen sich doch ungeheure mathematische Schwierigkeiten ein, sobald wir für jeden Augenblick die Lage des Systems bestimmen wollen; denn hierzu ist es notwendig, die $3n$ Differentialgleichungen zu integrieren und zwar zweimal zu integrieren, und das ist im allgemeinen eine so schwierige Aufgabe, daß ihre völlige Bewältigung der Analysis bisher noch nicht gelungen ist.

Mittels einfacher Integrationsmethoden kann man nämlich (wie wir im folgenden deutlicher sehen werden) höchstens sieben erste

---

[1] Denn auch das Problem der Planetenbewegung ist ein Problem der Dynamik eines einzelnen Massenpunktes, wenn man von der Wirkung der Planeten aufeinander und auf die Sonne abstrahiert.

Integrale[1] der $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewinnen, d. h. sieben Differentialgleichungen erster Ordnung, während man deren insgesamt $3n$ braucht. Die einfachen Integrationsmethoden erweisen sich also bereits bei einem System, das nur drei Massen umfaßt, als unzureichend, so daß schon das Dreikörperproblem (bei dem die Bewegungen dreier Körper zu bestimmen sind, die einander nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze anziehen) die Mathematiker vor die schwierigsten Aufgaben stellt.[2]

Da nun die erwähnten einfachen Integrationsmethoden, die — unter gewissen, in der Regel aber erfüllten Voraussetzungen — die sieben ersten Integrale liefern, ganz allgemein durchführbar sind, so muß die allgemeine Behandlung der Differentialgleichungen eines Systems zu neuen mechanischen Prinzipien führen, die uns der Mühe entheben, in jedem besonderen Falle die Integrationen durchzuführen, die vielmehr durch Einsetzen der speziellen Werte sogleich die gewünschten ersten Integrale für den betrachteten besonderen Fall ergeben.

Diese Prinzipe, deren Geschichte zum Teile allerdings älter ist als die analytischen Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes, werden daher auch die Integralprinzipe der Mechanik genannt. Es sind ihrer drei, nämlich die Prinzipe von der Erhaltung des Schwerpunktes, von der Erhaltung der Flächenmomente und von der Erhaltung der lebendigen Kraft.[3]

Das Prinzip von der Erhaltung des Schwerpunktes, mit dem wir uns in dieser Vorlesung befassen wollen, hängt auf das engste mit dem dritten Newtonschen Bewegungsgesetze zusammen, ja es wurde von Newton selbst nur als andere Fassung des Axioms der Gleichheit von Aktion und Reaktion angesehen. Dieses Axiom lehrt ja, daß sich die wechselseitigen Beschleunigungen zweier Körper umgekehrt wie ihre Massen verhalten, und es bedurfte nur einer sehr naheliegenden Ideenassoziation, um diesen Satz mit der von Archimedes gewonnenen Erkenntnis zu verbinden, daß der „Mittelpunkt" zweier Massen oder, wie man auch sagt, ihr Schwerpunkt[4], ihre Verbindungsstrecke im umgekehrten Verhältnisse der Massen teilt.

---

[1] Daß alle anderen Integrale außer den sieben einfachen in der Tat transzendent sind, hat in exakter Weise zuerst H. Bruns im Jahre 1887 nachgewiesen („Über die Integrale des Vielkörperproblems"; Leipziger Berichte 39, 1887).

[2] Den Anlaß zu der Entstehung des Dreikörperproblems gab die Mondtheorie, mit der sich in der Mitte des 18. Jahrunderts besonders d'Alembert, Clairault und Euler beschäftigten.

[3] Die wichtigsten grundlegenden Abhandlungen über die Integralprinzipe sind im 191. Bande der Ostwaldschen Klassiker der exakten Wissenschaften zusammengestellt (übersetzt von Arthur von Oettingen).

[4] Richtiger ist der von Daniel Bernoulli geschaffene Ausdruck „Massenmittelpunkt". Archimedes selbst spricht vom „Zentrum" schwerer Gebilde (z. B. *κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων*).

Newton spricht den Schwerpunktsatz als viertes Corollarium zu seinen Bewegungsgesetzen in der Form aus, daß der Schwerpunkt zweier oder mehrerer Körper seinen Zustand der Bewegung oder der Ruhe durch die Wechselwirkungen der Körper nicht ändere; daß vielmehr der gemeinsame Schwerpunkt der aufeinander wirkenden Körper, falls weder äußere Kräfte noch Widerstände vorhanden sind, im Zustande der Ruhe verharre, oder aber sich gleichförmig in gerader Linie fortbewege.[1]

Um die Richtigkeit dieses Satzes zu beweisen, betrachtet Newton als ersten Spezialfall zwei Körper, die sich gleichförmig nach irgendwelchen Richtungen bewegen; dann kann er durch eine verhältnismäßig einfache geometrische Überlegung (die hier übergangen werde) zeigen, daß in diesem Falle auch der Schwerpunkt der beiden Massen sich gleichförmig bewegen muß.[2]

Andererseits betrachten wir als zweiten Spezialfall zwei Körper, die in den Punkten A und B (Fig. 29) festgehalten werden und die sich,

Fig. 29.

nachdem man sie losläßt, unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Einwirkung in der Richtung ihrer Verbindungslinie bewegen. Solange die beiden Körper in den Punkten A und B ruhen, befindet sich ihr Massenmittelpunkt nach dem archimedischen Prinzipe im Punkte S, wobei die Proportion besteht

$$AS : SB = m_2 : m_1. \tag{1}$$

Nach Ablauf eines Zeitelementes mögen sich die Körper in den Punkten A' und B' befinden. Die Wege AA' und BB' müssen sich aber, da sie in der gleichen Zeit aus der Ruhelage zurückgelegt wurden, wie die Beschleunigungen verhalten; diese verhalten sich aber nach dem dritten Newtonschen Bewegungsgesetze umgekehrt wie die Massen. Folglich gilt auch die Beziehung

$$AA' : BB' = m_2 : m_1. \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) finden wir somit

$$A'S : SB' = m_2 : m_1; \tag{3}$$

[1] Principia mathematica, Leges motus, corollarium IV: Commune gravitatis centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se, non mutat statum suum vel motus vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

[2] Princ. math., lib. I, lemma 23.

d. h. der Punkt S ist auch noch in dem Augenblicke, in dem sich die beiden Massen in A' und B' befinden, ihr gemeinschaftlicher Massenmittelpunkt.

Man kann nun stets eine ganz beliebige Bewegung zweier Körper, die lediglich unter dem Einflusse ihres Beharrungsvermögens und einer zwischen ihnen wirkenden Kraft erfolgt, durch Superposition der beiden besprochenen Spezialfälle erklären. Damit erscheint der Newtonsche Satz für zwei Körper bewiesen, und es unterliegt natürlich keiner Schwierigkeit (wie uns auch die folgenden Betrachtungen zeigen werden), den Satz sodann auf Systeme von beliebig vielen Körpern auszudehnen.

Die Lehrsätze, die Newton über den Schwerpunkt eines Systems von freien Massenpunkten entwickelt hatte, fanden eine wichtige Ergänzung durch eine Reihe von Theoremen, die schon im Jahre 1673 Huygens in seinem „Horologium oscillatorium" mitgeteilt hatte. Diese Theoreme (von denen in einer der nächsten Vorlesungen ausführlich die Rede sein wird) beziehen sich jedoch im wesentlichen auf Systeme von Massenpunkten, die untereinander starr verbunden sind. Huygens zeigte, daß (wie wir sehen werden) für den Schwerpunkt eines solchen Systems (das man auch als einen starren Körper bezeichnet) eine Reihe von Sätzen gilt, die ursprünglich nur für einen einzelnen materiellen Punkt aufgestellt worden waren. Insbesondere gewann Huygens auch die (wie wir sehen werden) so ungemein bedeutungsvolle Erkenntnis, daß diese auf den Schwerpunkt bezüglichen Sätze auch dann ihre Gültigkeit behalten, wenn während des betrachteten Prozesses das System der untereinander starr verbundenen Massenpunkte in ein freies System verwandelt wird.[1]

In gleicher Weise wie bei Huygens erscheinen Erkenntnisse, die sich auf freie Systeme und solche, die sich auf starr verbundene Systeme beziehen, bei d'Alembert miteinander verknüpft. Besonders wichtig ist ein von d'Alembert entdeckter Satz, demzufolge der Schwerpunkt eines starr verbundenen Systems, in dessen Punkten lauter gleichgerichtete Kräfte angreifen, stets dieselbe Kurve beschreibt, wie sie ein einzelner Punkt des Systems in freiem Zustande zurücklegen würde.[2] So kompliziert auch die Bahn sein mag, die etwa ein Fingernagel eines Schwimmers beschreibt, der sich in einem Saltomortale von einem Sprungbrett in das Wasser stürzt, so muß doch (wofern man von dem Luftwiderstande absieht) während des Sprunges sein Schwerpunkt eine genau parabolische Bahn zurücklegen.

Für den allgemeinsten Fall, in dem nicht nur zwischen den Punkten eines Systems beliebige Wechselwirkungen stattfinden, sondern auch von außen her an dem System beliebig gerichtete Kräfte angreifen,

[1] Vgl. Vorlesung 13.

[2] Traité de dynamique, part. II, chap. II, theor. 2.

hat erst Lagrange das Verhalten des Schwerpunktes mittels analytischer Methoden untersucht.[1] Dem Gedankengange von Lagrange, der zugleich den Beweis des spezielleren Newtonschen Satzes in sich schließt, wollen auch wir im wesentlichen folgen (hierbei allerdings bisweilen die streng algebraische Darstellung von Lagrange durch eine etwas anschaulichere physikalische ersetzen[2]); und die erste Aufgabe,

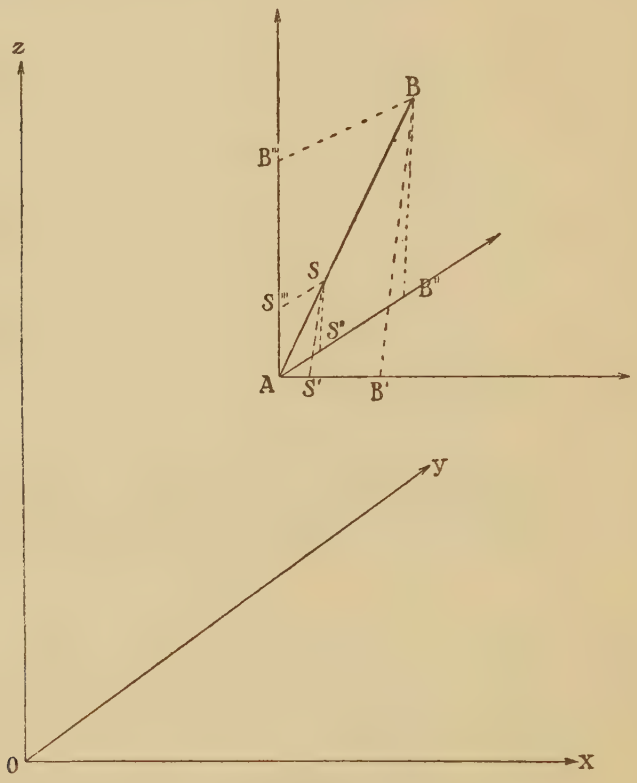

Fig. 30.

die uns hierbei entsteht, wird naturgemäß die sein, daß wir für die Lage des Schwerpunktes eines Systems von beliebigen Massen einen analytischen Ausdruck suchen werden.

Betrachten wir hierzu zunächst zwei Massen m_1 und m_2 in den Punkten A und B mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 (Fig. 30), so gilt nach Archimedes, wenn wir den Massenmittelpunkt mit S bezeichnen, die Proportion

[1] Mécanique analytique, part. II, sect. III, § 1.

[2] Lagrange leitet den Schwerpunktsatz direkt aus seiner „Universalformel der Dynamik" ab (vgl. Vorl. 17).

$$AS : SB = m_2 : m_1 ;$$

hieraus folgt ohne weiteres

$$AS = \frac{m_2 \cdot AB}{m_1 + m_2} . \tag{4}$$

Ziehen wir nun durch den Punkt A Parallele zu der x-, y- und z-Achse unseres Koordinatensystems und projizieren wir die Strecke AB auf diese drei Richtungen, so daß wir die Punkte S', S'', S''' und B', B'', B''' erhalten, so ist es ganz klar, daß dann in demselben Verhältnisse wie AB durch S auch AB' durch S', AB'' durch S'' und AB''' durch S''' geteilt werden müssen.

Nennen wir die Koordinaten des Massenmittelpunktes ξ, η und ζ, so ist nun

$$\left\{ \begin{array}{l} AS' = \xi - x_1 , \\ AS'' = \eta - y_1 , \\ AS''' = \zeta - z_1 . \end{array} \right. \tag{5}$$

Die Projektionen der Strecke AB auf die Richtungen der drei Koordinatenachsen sind aber $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Da also AB' durch S' auch in dem umgekehrten Verhältnisse der Massen geteilt wird, so ergibt sich nach Formel (4)

$$\xi - x_1 = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{m_1 + m_2}$$

oder

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} , \tag{6}$$

und zwei analoge Formeln erhalten wir für η und ζ.

Hieraus ergibt sich aber nun sehr leicht die Formel für den Mittelpunkt einer beliebigen Anzahl von Massen. Nehmen wir zunächst an, wir hätten den Mittelpunkt dreier Massen m_1, m_2 und m_3 zu berechnen, so würden wir zunächst den gemeinschaftlichen Mittelpunkt von m_1 und m_2 bestimmen; er sei S^*. In ihm hätten wir uns dann eine Masse M konzentriert zu denken, die eben gleich wäre der Summe von m_1 und m_2. Unser Problem reduziert sich also dann auf die Aufgabe, nach dem archimedischen Prinzipe den Mittelpunkt zweier Massen zu bestimmen, nämlich einer Masse M im Punkte S^* und einer Masse m_3 in dem Punkte mit den Koordinaten x_3, y_3 und z_3.

Bezeichnet man also die x-Koordinate des Punktes S^* mit ξ^* und die des Schwerpunktes aller drei Massen mit ξ', so ist nach Formel (6)

$$\xi' = \frac{(m_1 + m_2)\,\xi^* + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} .$$

Indem wir diese Überlegung auf ein System von n Massen ausdehnen, gelangen wir dann ohne weiteres zu den allgemeinen Formeln

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{\sum m_h \cdot x_h}{\sum m_h}, \\ \eta = \dfrac{\sum m_h \cdot y_h}{\sum m_h}, \\ \zeta = \dfrac{\sum m_h \cdot z_h}{\sum m_h}, \end{cases}$$

wobei alle Summen über sämtliche h, also über alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu erstrecken sind.[1]

Nachdem wir derart einen analytischen Ausdruck für die Lage des Massenmittelpunktes unseres Systems gefunden haben, gehen wir nunmehr zu der Betrachtung der auf das System einwirkenden Kräfte über, und zwar wollen wir bei diesen zwei Gruppen unterscheiden. Wir wollen nämlich solche Kräfte, die zwischen den einzelnen Massen des Systems wirken, innere, alle übrigen an dem System angreifenden äußere Kräfte nennen. Wird auf einen dem Systeme angehörigen Massenpunkt irgend eine Wirkung ausgeübt, so entspricht ihr nach dem dritten Newtonschen Bewegungsgesetze ja stets eine gleich große Gegenwirkung. Je nachdem nun, ob diese zu der angreifenden Kraft gehörige Gegenwirkung an einer Masse erfolgt, die dem System angehört, oder dies nicht der Fall ist, nennen wir die angreifende Kraft eine innere oder äußere. Ob eine Kraft als eine innere oder äußere anzusehen ist, hängt also von der Art ab, wie wir das zu betrachtende System abgrenzen (je nach der Abgrenzung des Systems ist natürlich auch die Lage seines Schwerpunktes eine durchaus verschiedene). Die Anziehungskraft, die die Sonne auf den Mond ausübt, erscheint als eine äußere Kraft, wenn wir die Erde und den Mond als ein System für sich ansehen; dieselbe Kraft erscheint hingegen als eine innere, wenn wir das gesamte Sonnensystem betrachten.

Fassen wir nun bei einem Systeme von n Massen einen bestimmten Massenpunkt in das Auge (wir denken uns alle Massenpunkte mit Nummern von 1 bis n versehen und wollen den mit der Nummer h herausgreifen), so wollen wir mit $\mathfrak{R}_h$ die Resultierende aus sämtlichen an diesem Punkte angreifenden äußeren Kräften bezeichnen. Hingegen wollen wir die innere Kraft, die auf den h-ten Massenpunkt von dem k-ten

[1] Aus diesen Formeln ergeben sich ohne weiteres die geometrischen Formeln für den Schwerpunkt einer ebenen Figur

$$\xi = \frac{\int\int x\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy},$$

$$\eta = \frac{\int\int y\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy}$$

und die analogen Formeln für den Schwerpunkt eines stereometrischen Gebildes.

ausgeübt wird, mit $\mathfrak{K}'_{hk}$ bezeichnen, wobei eben k sämtliche ganzzahlige Werte von 1 bis n mit Ausschluß von h annehmen kann.

Die Bewegungsgleichungen des h-ten Punktes lauten dann

$$(8) \quad \begin{cases} m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{d t^2} = X_h + \sum' X'_{hk}, \\ m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{d t^2} = Y_h + \sum' Y'_{hk}, \\ m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{d t^2} = Z_h + \sum' Z'_{hk}, \end{cases}$$

wobei eben alle mit einem Striche versehenen Summen über alle ganzzahligen Werte von k von 1 bis n mit Ausschluß von h zu bilden sind.

Die Integrationsmethode, die zu dem Schwerpunktsatze führt, besteht nun darin, daß man zunächst die erste der drei Gleichungen (8) für sämtliche Werte von h bildet und dann über sämtliche Werte von h summiert. In analoger Weise verfährt man mit der zweiten und mit der dritten Gleichung. Es ergeben sich derart drei Gleichungen, deren erste die Gestalt hat

$$(9) \quad \sum_{h=1}^{h=n} m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{d t^2} = \sum_{h=1}^{h=n} X_h + \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=n}{}' X'_{hk}.$$

Aus dem Prinzipe der Gleichheit von Aktion und Reaktion folgt aber nun, daß die in den Gleichungen (9) auftretenden Doppelsummen verschwinden müssen. Denn nennen wir eben $\mathfrak{K}_{hk}$ die Kraft, die auf den h-ten Massenpunkt der k-te ausübt und $\mathfrak{K}_{kh}$ die Kraft, die auf den k-ten Massenpunkt der h-te ausübt, so gelten ja, da nach dem dritten Newtonschen Bewegungsgesetze $\mathfrak{K}_{kh}$ und $\mathfrak{K}_{hk}$ entgegengesetzt gleich sein müssen, die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} X'_{hk} + X'_{kh} = 0, \\ Y'_{hk} + Y'_{kh} = 0, \\ Z'_{hk} + Z'_{kh} = 0. \end{cases}$$

Wir wollen zunächst nur die erste dieser drei Gleichungen, die X-Gleichung, in das Auge fassen. Wir setzen nun in ihr zunächst $h=1$ und bilden dann die Gleichungen für sämtliche Werte von k mit Ausnahme von 1. Sodann setzen wir in ihr $h=2$ und bilden nunmehr die Gleichungen für sämtliche Werte von k mit Ausnahme von 2. Dieses Verfahren setzen wir fort, so daß wir schließlich in der Gleichung $h=n$ setzen und nun die Gleichungen für sämtliche Werte von k mit Ausnahme von n bilden.

Wir erhalten derart $n(n-1)$ Gleichungen und erkennen auch, daß jede Kraftkomponente in diesem System von Gleichungen zweimal vorkommt. Denn wir werden z. B. entsprechend der Gleichung

$$X'_{3,5} + X'_{5,3} = 0,$$

die wir erhalten, indem wir $h=3$ und $k=5$ setzen, auch eine Gleichung vorfinden

$$X'_{5,3} + X'_{3,5} = 0,$$

die dadurch entstanden ist, daß $h=5$ und $k=3$ gesetzt wurde.

Addieren wir also alle $n(n-1)$ Gleichungen, so erhalten wir auf der linken Seite

$$2\sum_{h=1}^{h=n}{}' \sum_{k=1}^{k=n}{}' X'_{hk},$$

auf der rechten Seite hingegen Null. Da sich dieselbe Überlegung aber auch für die Y- und Z-Komponenten durchführen läßt, so finden wir also

$$\sum\sum' X'_{hk} = \sum\sum' Y'_{hk} = \sum\sum' Z'_{hk} = 0. \tag{11}$$

Die Gleichung (9) nimmt infolgedessen, da der Differentialquotient einer Summe gleich ist der Summe der Differentialquotienten, die einfache Gestalt an

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum m_h \cdot x_h = \sum X_h. \tag{12}$$

Hierfür und für die beiden analogen Gleichungen, die für die Y- und Z-Komponenten gelten, können wir aber auf Grund der Formeln (7) auch schreiben

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\sum m_h &= \sum X_h, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2}\cdot\sum m_h &= \sum Y_h, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}\cdot\sum m_h &= \sum Z_h, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

wobei alle Summen von $h=1$ bis $h=n$ zu bilden sind.

Falls also auf unser System keine äußeren Kräfte wirken, so wird die rechte Seite der Gleichungen (13) Null; in diesem Falle liefern uns die Formeln (13) sofort drei erste Integrale der Bewegungsgleichungen (8) in der Form

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= c_1, \\ \frac{d\eta}{dt} &= c_2, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= c_3, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

d. h. der Schwerpunkt eines Systems, auf das nur innere Kräfte wirken, muß entweder ruhen oder sich gleichförmig und geradlinig bewegen (mit einer konstanten und stets gleich gerichteten Geschwindigkeit, deren Komponenten eben c_1, c_2, c_3 sind).

Wirken hingegen auf das System äußere Kräfte, so verhält sich, wie ohne weiteres die Gleichungen (13) zeigen, das System so, als ob seine

ganze Masse in dem Schwerpunkte vereinigt wäre und an dieser nun in dem Schwerpunkte konzentrierten Masse alle die Kräfte, die tatsächlich auf die einzelnen Massenpunkte ausgeübt werden, in gleicher Stärke und in gleicher Richtung angreifen würden.[1]

Es ist bereits darauf hingewiesen worden, daß der auf abgeschlossene Systeme angewandte Schwerpunktssatz im Wesen identisch ist mit dem cartesianischen Prinzipe der Erhaltung der Bewegungsquantität[2], und in der Tat können wir auch den Gleichungen (13), die sich auf den Fall des Wirkens äußerer Kräfte beziehen, eine einfache Gestalt geben, wenn wir in diese Gleichungen die Bewegungsquantität als gerichtete Größe einführen.

Um den Vektor zu erhalten, der uns nach Größe und Richtung die Bewegungsquantität eines materiellen Punktes an irgend einer Stelle seiner Bahn darstellt, brauchen wir nur an dieser Stelle den Geschwindigkeitsvektor zu errichten und ihn im Verhältnisse der Masseneinheit zur Masse des bewegten Körpers zu vergrößern (dann ist eben seine Länge gleich dem Produkte aus der Masse und dem absoluten Werte der Geschwindigkeit). Bezeichnen wir die Komponenten dieses Vektors, den wir $\mathfrak{G}$ nennen wollen, mit G_x, G_y, G_z, so lassen sich, da ja

$$G_x = m \cdot v_x = m \cdot \frac{dx}{dt} \tag{15}$$

ist[3], die Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes auch in der Form schreiben

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} &= X, \\ \frac{dG_y}{dt} &= Y, \\ \frac{dG_z}{dt} &= Z. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

[1] Sind die äußeren Kräfte die auf die einzelnen Massenpunkte wirkenden Schwerkräfte, so kann man sich wohl die ganze Masse in dem Massenmittelpunkte konzentriert und in diesem nun das ganze Gewicht angreifend denken — so daß also tatsächlich der Schwerpunkt mit dem Massenmittelpunkte identisch ist. Würden hingegen zwei Körper in den Punkten A und B gegen ein festes Zentrum O mit einer Kraft gezogen, die dem Newtonschen Gravitationsgesetze gehorcht (und könnte man nicht mehr die Richtungen AO und BO als parallel ansehen), so wäre es durchaus falsch, wollte man das System so behandeln, als ob in dem Schwerpunkte S eine Kraft angriffe, die proportional wäre der Summe der beiden Massen und umgekehrt proportional $\overline{SO}^2$. Man wird vielmehr im Punkte S zwei Vektoren errichten müssen, die nach Größe und Richtung die in den Punkten A und B tatsächlich angreifenden Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ darstellen. Durch die geometrische Summe der beiden Vektoren wird nach Richtung und Größe eine Kraft $\mathfrak{R}$ bestimmt sein. Das System verhält sich dann so, als ob im Punkte S die Masse beider Körper konzentriert wäre und in ihm eine Kraft $\mathfrak{R}$ angriffe.

[1] Vgl. Vorlesung 6.

[2] Nach Gleichungen (3) von Vorl. 8.

Für ein System von beliebig vielen Massenpunkten gelten aber, wie wir nach einer einfachen Umformung der Gleichungen (12) erkennen, die durchaus analogen Beziehungen

$$(17) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\sum G_x = \sum X, \\ \frac{d}{dt}\sum G_y = \sum Y, \\ \frac{d}{dt}\sum G_z = \sum Z. \end{cases}$$

Zwölfte Vorlesung.

Das Prinzip der Erhaltung der Flächenmomente.

Das Prinzip der Erhaltung der Flächenmomente, das wir in dieser Vorlesung als zweiten Integralsatz der Mechanik kennen lernen wollen, ist aus dem ersten Keplerschen Gesetze hervorgegangen, das die Konstanz der Flächengeschwindigkeiten der Planeten in ihren Bahnen um die Sonne lehrt. Newton[1] hat, wie schon erwähnt wurde, gezeigt, daß das empirisch gewonnene erste Keplersche Gesetz nur einen Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes darstellt, demzufolge bei jeder Bewegung, die unter dem Einflusse einer stets nach einem bestimmten Zentrum gerichteten Kraft erfolgt, der bewegte Körper stets in derselben Ebene bleibt und der von ihm zu dem Zentrum gezogene Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

Newton hat für diesen Satz auch einen keineswegs komplizierten Beweis auf synthetisch-geometrischer Grundlage gegeben; doch wollen wir, da wir zu sehr an die analytische Methode gewöhnt sind, auch für diesen Satz den Beweis derart durchführen, wie er als Spezialfall in der allgemeinen Darlegung von Lagrange (die wir noch kennen lernen werden) mitenthalten ist.

Hierzu müssen wir zunächst die beiden Ausdrücke „Zentralkraft" und „Flächengeschwindigkeit" in die Sprache der analytischen Geometrie übersetzen. Wir werden natürlich zweckmäßigerweise den festen Punkt, nach dem die Kraft gerichtet ist, als Koordinatenursprung wählen und können dann ohne weiteres die Tatsache, daß die Kraft (deren Komponenten X, Y, Z seien und die in einem Punkte mit den Koordinaten x, y, z angreife) nach dem Koordinatenursprunge gerichtet ist, durch die Proportion ausdrücken

$$X : Y : Z = x : y : z. \tag{1}$$

Weiter betrachten wir den Sektor, den in dem Zeitelemente dt der von dem bewegten Körper nach dem Koordinatenursprunge gezogene Leitstrahl beschreibt und fragen uns, wie groß die Projektionen dieses Sektors auf die drei Koordinatenebenen sind. Die Projektion auf

[1] Princ. math., lib. I, sect. II, prop. 1.

die x-y-Ebene ist, wie man ohne weiteres erkennt (Fig. 31), ein Dreieck, dessen Eckpunkte die Koordinaten haben

$$\emptyset,\ \emptyset$$
$$x,\ y$$
$$x + dx,\ y + dy$$

und der doppelte Flächeninhalt dieses Dreieckes ist nach der bekannten elementaren Formel

$$2dF' = \pm (x\,dy - y\,dx), \tag{2}$$

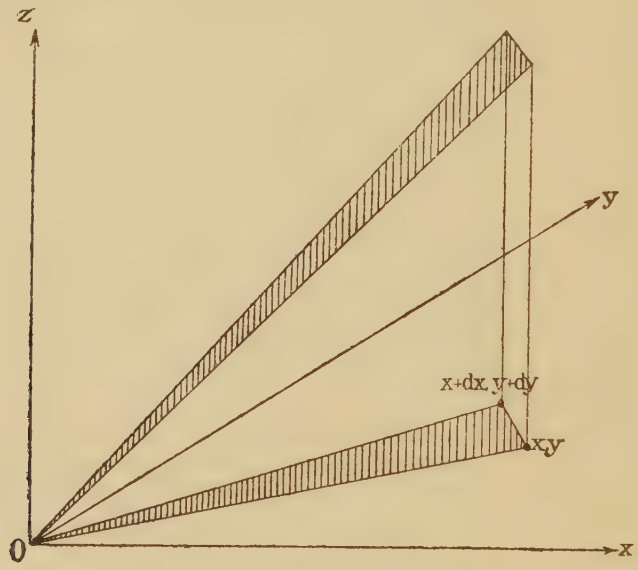

Fig. 31.

wobei bekanntlich das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem, ob der Umlaufsinn des Dreieckes in der Reihenfolge der Punkte $(\emptyset, \emptyset)$, (x, y), $(x+dx, y+dy)$ positiv oder negativ ist. Als positiv bezeichnet man dabei wieder einen Umlauf, der in demselben Sinne erfolgt wie die Drehung, die auf dem kürzesten Wege die positive x-Achse in die positive y-Achse überführt.

Die Formel (2) läßt uns bereits den Weg ahnen, den wir einzuschlagen haben, um aus den Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes den Flächensatz abzuleiten. Diese Bewegungsgleichungen lauten ja (vgl. Vorl. 8)

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Wir multiplizieren nun die erste Gleichung mit y, die zweite mit x und subtrahieren dann die erste Gleichung von der zweiten. Wir finden derart

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = Yx - Xy; \tag{4}$$

und zwei analoge Gleichungen, die sich durch zyklische Vertauschung der Koordinaten und der Kraftkomponenten ergeben, erhalten wir, wenn wir die analogen Operationen mit der zweiten und dritten und sodann mit der dritten und ersten Bewegungsgleichung durchführen.

Die Formel (4) läßt aber nun eine wesentliche Vereinfachung zu, die direkt zu dem Ausdrucke für die Flächengeschwindigkeit führt; diese Vereinfachung ist auf Grund der Tatsache möglich (die von der mathematischen Seite betrachtet den eigentlichen Kern des Flächenprinzipes darstellt), daß der in der Gleichung (4) eingeklammerte Ausdruck einen vollständigen Differentialquotienten darstellt. Er ist nämlich gleich dem zeitlichen Differentialquotienten der auf die x-y-Ebene projizierten doppelten Flächengeschwindigkeit. Denn nach der Regel, die für die Differentiation eines Produktes gilt, ist

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} - y\frac{d^2x}{dt^2},$$

wobei eben auf der rechten Seite das erste und dritte Glied einander gegenseitig aufheben.

Bezeichnen wir also die Projektion der doppelten Flächengeschwindigkeit auf die x-y-Ebene mit ω_{xy} und in analoger Weise die Projektionen der doppelten Flächengeschwindigkeit auf die y-z-Ebene und auf die z-x-Ebene mit ω_{yz} und ω_{zx}, so erhalten wir die drei Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} m\cdot\frac{d\omega_{xy}}{dt} &= Yx - Xy,\\ m\cdot\frac{d\omega_{yz}}{dt} &= Zy - Yz,\\ m\cdot\frac{d\omega_{zx}}{dt} &= Xz - Zx. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Wenn aber nun die Kraft stets zu dem Koordinatenursprunge gerichtet und infolgedessen immer die Proportion (1) erfüllt ist, so sind die drei Ausdrücke auf den rechten Seiten der Gleichungen (5) Null und wir erhalten daher dann ohne weiteres die Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} \omega_{xy} &= c_1,\\ \omega_{yz} &= c_2,\\ \omega_{zx} &= c_3, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

wobei c_1, c_2, c_3 Konstanten bedeuten. Die Beziehungen (6) können aber offenbar nur dann erfüllt sein, wenn der von dem bewegten Körper

nach dem Koordinatenursprung gezogene Leitstrahl stets in derselben Ebene bleibt und in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

Nachdem wir derart den Newtonschen Flächensatz nach der Methode von Lagrange analytisch bewiesen haben, wollen wir noch, bevor wir zu der Verallgemeinerung des Flächensatzes auf Systeme von mehreren Massenpunkten übergehen, den Gleichungen (5) eine allgemeinere Deutung geben und uns fragen, was diese Gleichungen aussagen, falls ihre rechten Seiten nicht verschwinden; wir folgen dabei im wesentlichen Überlegungen, die einerseits in Eulers „Theorie der Bewegung starrer Körper", andererseits in der „Analytischen Mechanik" von Lagrange enthalten sind.

Der Einfachheit halber wollen wir zunächst unser allgemeines stereometrisches Problem auf ein planimetrisches reduzieren; wir wollen annehmen, daß der Angriffspunkt der Kraft in der x-y-Ebene liege und daß in diese Ebene auch die Richtung der Kraft falle, so daß also von den drei Gleichungen (5) überhaupt nur die erste übrig bleibt. Dann erkennen wir nun leicht, daß die rechte Seite dieser Gleichung nichts anderes darstellt als das statische Moment der angreifenden Kraft in bezug auf den Koordinatenursprung. Denn da die Komponenten X und Y aufeinander senkrecht stehen, so kann man nach dem in früheren Vorlesungen schon oft erwähnten Grundsatze jede der beiden Komponenten so betrachten, als ob die andere Komponente gar nicht vorhanden wäre. Es müssen also auch die statischen Momente der beiden Komponenten voneinander unabhängig sein.

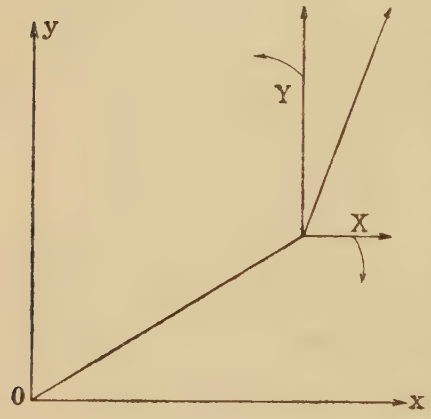

Fig. 32.

Nun ist das Lot, das man von dem Koordinatenursprunge auf die Richtung der Komponente X fällt, y; das Lot, das man von dem Koordinatenursprunge auf die Richtung der Komponente Y fällt, ist x. Da die beiden Kraftkomponenten aber den Punkt, in dem sie angreifen, falls er mit dem Koordinatenursprunge starr verbunden wäre, in entgegengesetztem Sinne drehen würden (Fig. 32), so müssen auch ihre Momente entgegengesetzte Vorzeichen haben, und somit muß das gesamte Moment der angreifenden Kraft gleich sein der Differenz von Xy und Yx. Welches der beiden Momente man positiv und welches man negativ rechnet, ist Sache der Übereinkunft. Man bezeichnet daher zweckmäßig ein Moment als positiv, wenn die Drehung, die es hervorbringen würde, wenn der Angriffspunkt mit dem Koordinaten-

ursprung starr verbunden wäre, denselben Sinn hätte wie eine Drehung, die auf dem kürzesten Wege die positive x- in die positive y-Achse überführt. Wir haben also das Moment der Komponente Y als positiv anzusehen und daher das gesamte Moment M' der Kraft gleichzusetzen

$$M' = Yx - Xy.$$

Nun erkennen wir aber auch leicht, welche Bedeutung der Ausdruck $Yx - Xy$ in dem allgemeinen Falle besitzt, in dem der Angriffspunkt der Kraft irgendwo im Raume liegt und auch die Kraft eine ganz

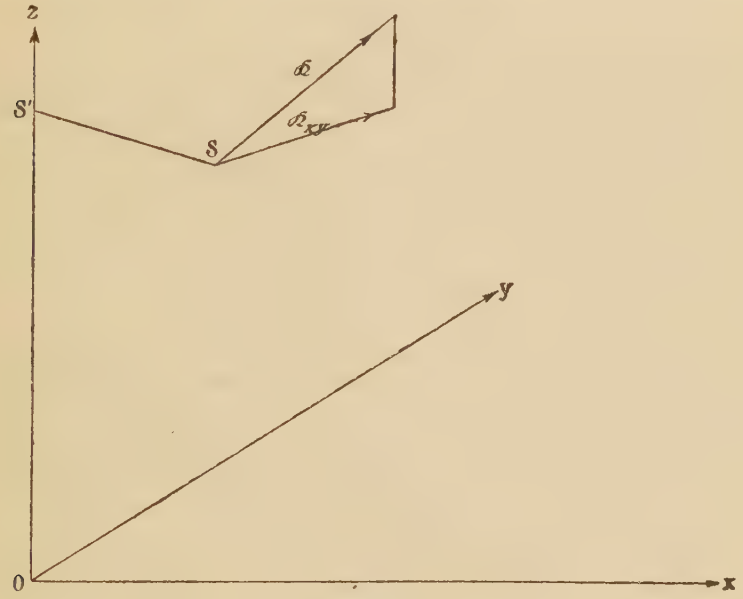

Fig. 33.

beliebige Richtung im Raume hat. Wir werden dann durch den Angriffspunkt S eine Ebene parallel der x-y-Ebene legen, die von der z-Achse im Punkte S' geschnitten werde (Fig. 33). Die Strecke $S'S$, die auf der z-Achse senkrecht steht, stellt also dann die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft von der z-Achse dar. Wir zerlegen nun die Kraft $\mathfrak{R}$ in zwei zueinander senkrechte Komponenten, deren eine, die wir $\mathfrak{R}_{xy}$ nennen, in der zur x-y-Ebene parallelen Ebene liege und deren andere auf dieser Ebene senkrecht stehe.

Dann erkennt man, daß der Ausdruck $Yx - Xy$ nichts anderes darstellt als das statische Moment der Kraft $\mathfrak{R}_{xy}$ in bezug auf den Punkt S'. Da aber die andere Komponente von $\mathfrak{R}$, die auf $\mathfrak{R}_{xy}$ senkrecht steht, in einer zur x-y-Ebene parallelen Ebene überhaupt keine Wirkungen, also auch unmöglich eine Drehung um die z-Achse hervorzubringen ver-

mag, so kann man das statische Moment der Kraft $\mathfrak{K}_{xy}$ in bezug auf den Punkt S' als das Drehmoment der gesamten Kraft $\mathfrak{K}$ um die z-Achse bezeichnen. Nennen wir also die Momente der Kraft $\mathfrak{K}$ um die x-, y- und z-Achse M_x, M_y und M_z, so können wir die Gleichungen (5) auch in der übersichtlichen Form schreiben

$$(7) \qquad \begin{cases} m \cdot \frac{d\,\omega_{xy}}{d\,t} = M_z, \\ m \cdot \frac{d\,\omega_{yz}}{d\,t} = M_x, \\ m \cdot \frac{d\,\omega_{zx}}{d\,t} = M_y. \end{cases}$$

Wir wollen uns nun fragen, in welchen Beziehungen die Drehmomente der Kraft $\mathfrak{K}$ um die drei Koordinatenachsen zu dem gesamten statischen Momente stehen. Das statische Moment ist zufolge seiner Definition seinem absoluten Betrage nach gleich dem Produkte aus K und aus dem Lote, das man von dem Koordinatenursprunge auf die Richtung der Kraft fällt. Nun ist aber das Lot wieder gleich $r \cdot \sin(\mathfrak{K}, \mathfrak{r})$, wenn wir mit $\mathfrak{r}$ die Strecke OS bezeichnen, die von dem Koordinatenursprunge zu dem Angriffspunkte der Kraft geht. Das Produkt $K \cdot r \cdot \sin(\mathfrak{K}, \mathfrak{r})$ ist aber nichts anderes als der Flächeninhalt eines Parallelogrammes, dessen eine Ecke der Koordinatenursprung ist und dessen Seiten von den Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{r}$ gebildet werden (Fig. 34).

Man erkennt nun leicht, daß die Größen, die wir mit M_z, M_x und M_y bezeichnet haben, nichts anderes sind als die Projektionen dieses Parallelogrammes auf die x-y-, die y-z- und die z-x-Ebene. Denn betrachten wir z. B. die Projektion auf die x-y-Ebene, so ist diese doppelt so groß wie ein Dreieck mit den Koordinaten

$$\begin{matrix} 0, & 0 \\ X, & Y \\ x, & y; \end{matrix}$$

der doppelte Flächeninhalt dieses Dreieckes ist aber

$$Yx - Xy \quad \text{oder} \quad M_z.$$

Das statische Moment ist also jedenfalls als eine gerichtete Größe anzusehen, deren absoluter Betrag und deren Richtung durch den Flächeninhalt des aus den Vektoren $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{r}$ gebildeten Parallelogrammes und durch dessen Orientierung im Raume gegeben sind. Besser als durch das Parallelogramm selbst kann man aber nun, so wie es zuerst Graßmann[1] tat, das Moment nach Größe und Richtung durch einen „ergänzenden" Vektor darstellen, den man in

[1] „Lineale Ausdehnungslehre" (1844).

dem Angriffspunkte der Kraft senkrecht auf der Fläche des Parallelogrammes errichtet und dem man so viele Längeneinheiten gibt, wie das Parallelogramm Flächeneinheiten enthält. (Man gibt dabei dem Vektor einen solchen Richtungssinn, daß, von seiner Spitze aus gesehen, die Drehung, die die Kraft hervorzubringen sucht, positiv

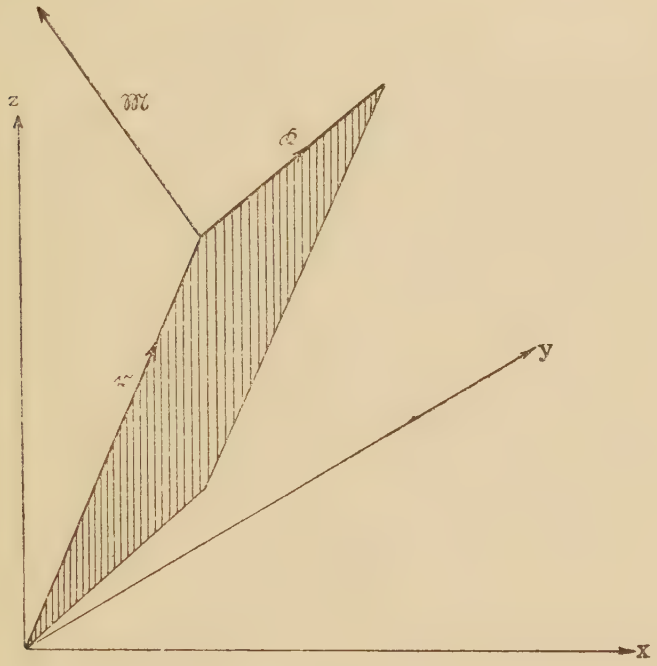

Fig. 34.

erscheint). Der „ergänzende" Vektor stellt also dann nach Größe und Richtung das statische Moment dar, so daß man ihn einfach als den Momentenvektor bezeichnen kann.

Da aber nun dieser Vektor natürlich denselben Winkel mit der z-Achse bildet wie die Parallelogrammebene mit der x-y-Ebene, so muß auch die z-Komponente des Momentenvektors ebenso viele Längeneinheiten enthalten, wie die Projektion des Parallelogrammes auf die x-y-Ebene Flächeneinheiten enthält. Die Länge der z-Komponente des Momentenvektors ist demnach durch den Ausdruck gegeben $(Yx - Xy)$, so daß also in der Tat die ergänzenden Vektoren, die zu den Drehmomenten der Kraft um die drei Koordinatenachsen gehören, zugleich die drei orthogonalen Komponenten des (gesamten) Momentenvektors sind.

Eine noch anschaulichere Form können wir schließlich den Gleichungen (5) geben, wenn wir in unsere Betrachtungen einen neuen Be-

griff einführen, dessen eigentlicher Schöpfer Daniel Bernoulli war. In seiner Abhandlung über ein „Neues Problem der Mechanik" (von der noch ausführlicher die Rede sein wird) hat Bernoulli bei der Betrachtung einer gleichförmigen Kreisbewegung die Bezeichnung „Kreisbewegungsmoment" eingeführt und hierbei unter dem „momentum du mouvement circulatoire" das Produkt verstanden aus der konstanten Geschwindigkeit des Körpers, aus seiner Masse und aus seiner Entfernung von dem Kreismittelpunkte (also die Größe $m \cdot v \cdot r$).

Die Verallgemeinerung dieses von Daniel Bernoulli — und übrigens gleichzeitig auch von Euler — geschaffenen Begriffes führte dann, wie wir noch sehen werden, d'Arcy zu dem Begriffe der „Wirkung (action) eines Körpers um einen Punkt", worunter d'Arcy das Moment der Bewegungsgröße des Körpers in bezug auf den Punkt verstand. Man hat sich dieses Moment in ganz derselben Weise gebildet zu denken wie das statische Moment einer Kraft[1], nur daß eben an die Stelle der Kraft als ebenfalls gerichtete Größe die Bewegungsquantität tritt. Sie wird, wie wir schon in der letzten Vorlesung sahen, durch einen Vektor dargestellt, den wir $\mathfrak{G}$ nannten, der dieselbe Richtung hat wie der Geschwindigkeitsvektor an der betreffenden Stelle der Bahn und dessen absoluter Betrag gleich ist $m \cdot v$.

Das Moment der Bewegungsgröße in bezug auf den Koordinatenursprung wird demnach durch den Flächeninhalt eines Parallelogrammes dargestellt, dessen einer Eckpunkt sich im Koordinatenursprunge befindet und dessen Seiten von den Vektoren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{r}$ gebildet werden. Aus dem früher Gesagten ergibt sich aber sofort, daß, wenn wir das Moment der Bewegungsgröße wieder durch den „ergänzenden" Vektor $\mathfrak{L}$ darstellen, die z-Komponente dieses Vektors durch die Gleichung gegeben ist

$$L_z = G_y \cdot x - G_x \cdot y \tag{8}$$

oder da ja

$$G_x = m \cdot \frac{dx}{dt} \tag{9}$$

ist usw.,

$$L_z = m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right). \tag{10}$$

Auf Grund dieser Beziehung und der beiden analogen, die sich durch zyklische Vertauschung der Koordinaten ergeben, können wir aber nun unter Berücksichtigung der Formel (4) die Gleichungen (5) — wenn wir zugleich ihre Reihenfolge verändern — in der überaus einfachen und übersichtlichen Form[2] anschreiben

---

[1] Man beachte aber, daß das Moment der Bewegungsgröße und das statische Moment einer Kraft verschiedene physikalische Dimensionen haben.

[2] Die in diesen Gleichungen zum Ausdrucke gelangende Auffassung begründete Poinsot in einem Aufsatze, der 1806 in dem Journal de École polytechnique unter dem Titel erschien: „Mémoire sur la composition des moments et des aires". Der Aufsatz erschien auch als Anhang zu späteren Auflagen der „Élements de statique".

$$(11)\qquad \begin{cases} \frac{dL_x}{dt} = M_x, \\ \frac{dL_y}{dt} = M_y, \\ \frac{dL_z}{dt} = M_z. \end{cases}$$

Ein Vergleich dieser Formeln mit den Formeln (16) von Vorl. 11 zeigt aber auf das deutlichste die völlige Analogie zwischen dem erweiterten Flächensatze und dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetze, indem dieselbe Beziehung wie zwischen der Kraft und der Bewegungsgröße auch zwischen deren Momenten besteht. Wie in bezug auf eine beliebige Richtung die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße gleich ist der einwirkenden Kraft, so ist auch die zeitliche Änderung, die das Drehmoment der Bewegungsgröße um eine beliebige Richtung erfährt, immer gleich dem Drehmomente der angreifenden Kraft um diese Richtung.

In der einfachsten Form äußert sich die besprochene Analogie in der Ähnlichkeit zwischen dem Kepler-Newtonschen Prinzipe von der Konstanz der Flächengeschwindigkeit bei der Zentralbewegung, also bei dem Fehlen eines Kraftmomentes, und dem Galileischen Prinzipe von der Konstanz der geradlinigen Geschwindigkeit bei dem Fehlen einer äußeren Kraft; und wie die Erweiterung des Beharrungsgesetzes bereits bei Descartes (wie wir sahen[1]) zu dem Satze führte, daß in einem abgeschlossenen Systeme trotz aller Wechselwirkungen die Summe der Produkte aus allen Massen und ihren Geschwindigkeiten keiner Veränderung fähig ist, so mußte auch die Erweiterung des Prinzipes von der Konstanz der Flächengeschwindigkeit zu der analogen Erkenntnis führen, daß auch die Summe der Produkte aus den einzelnen Massen und aus ihren Flächengeschwindigkeiten, daß auch die Summe der Flächenmomente oder Rotationsmomente, wie man sagt, für jedes System, das keinen äußeren Einflüssen unterliegt, eine unveränderliche Größe darstellt.

Den Anlaß zu der Auffindung dieses wichtigen Gesetzes gab eine Aufgabe, die um das Jahr 1740 Euler aufstellte und die die Bewegung von Kugeln in drehbaren Röhren betraf. Mit der Lösung dieser Aufgabe befaßten sich insbesondere Euler und Daniel Bernoulli, die beide durch ihre Untersuchungen zu der Auffindung des Prinzipes der Erhaltung der Flächenmomente geführt wurden.

Daniel Bernoulli betrachtete in seiner Abhandlung, die 1745 der Berliner Akademie unter dem Titel „Nouveau probléme de Mécanique" vorgelegt wurde[2], das „Kreisbewegungsmoment" der einzelnen

[1] Vgl. Vorles. 6.

[2] Histoire de l'acad. de Berlin, 1745, p. 54—70; deutsch in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, Bd. 191.

Massen und konnte zeigen, daß die Summe aus dem Kreisbewegungsmomente der Röhre (das er unter Benutzung der Huygensschen Sätze über den Schwingungsmittelpunkt berechnete) und aus dem Kreisbewegungsmomente einer eingeschlossenen Kugel durch die Wechselwirkungen zwischen der Röhre und der Kugel keine Änderung erfährt. Diesen Satz konnte er dann auch auf den Fall ausdehnen, daß die Röhre beliebig viele Körper einschließt. Zu ganz ähnlichen Ergebnissen gelangte auch Euler in seiner Abhandlung[1], wenn er auch das neue mechanische Prinzip nicht in so deutlicher Form aussprach wie Daniel Bernoulli.

Eine allgemeinere Fassung gab dem neuen Satze dann in einer Abhandlung, die 1747 der Pariser Akademie vorgelegt wurde[2], Graf Patrick d'Arcy. d'Arcy griff auf das Newtonsche Flächentheorem zurück und verallgemeinerte es auf den Fall von beliebig vielen Massen, die keinen äußeren Einflüssen unterliegen, die jedoch aufeinander beliebige Wirkungen ausüben mögen, „sei es durch Fäden oder starre Verbindungen oder durch Anziehung nach bestimmten Gesetzen".

d'Arcy nahm zunächst an, daß sich alle Körper in derselben Ebene bewegen; er konnte nachweisen, daß dann trotz der gegenseitigen Einwirkungen dennoch stets die Summe aus allen Massen, jede multipliziert mit der Fläche, die in einer bestimmten Zeit der von ihr nach einem festen (aber beliebig gewählten) Punkte gezogene Leitstrahl beschreibt, der Zeit proportional ist. In einer zweiten Abhandlung, die etwas später der Pariser Akademie vorgelegt wurde, zeigte dann d'Arcy, daß sein Satz auch für den Fall Anwendung finden kann, daß sich die Körper in verschiedenen Ebenen bewegen; auch dann muß die Summe aus allen Massen, jede multipliziert mit der Projektion der beschriebenen Fläche auf eine bestimmte Ebene, der Zeit proportional sein.

Wir erkennen leicht, daß der d'Arcysche Satz mit dem Bernoullischen identisch ist, wenn d'Arcy eben auch statt des Spezialfalles der gleichmäßigen Kreisbewegung ganz allgemeine Bewegungen betrachtet. Im übrigen handelt es sich aber nur um zwei verschiedene Fassungen eines und desselben Gedankens. Denn wenn nach d'Arcy die Summe der Produkte aus den Massen und den Flächen der Zeit proportional ist, so muß, wenn wir die in der Zeiteinheit bei einer gleichmäßigen Kreisbewegung beschriebene Fläche mit f bezeichnen, nach d'Arcy Σmf konstant sein. Nun ist aber der in der Zeiteinheit beschriebene Sektor gleich $\frac{v \cdot r}{2}$, so daß also aus dem d'Arcyschen Satze mit Notwendigkeit folgt, daß auch — so wie es eben Daniel Bernoulli lehrte — die

[1] De motu corporum in superficiebus mobilibus (L. Euleri Opuscula varii argumenti, Bd. I, p. 1—136).

[2] „Problème de Dynamique." Hist. et mém. de l'acad. roy. des sciences de Paris, 1747, p. 344—361.

Summe $\Sigma\, m \cdot v \cdot r$ trotz der gegenseitigen Einwirkungen der Körper konstant bleiben muß.

Im übrigen hat d'Arcy selbst in einer späteren, 1749 der Pariser Akademie vorgelegten Abhandlung[1] seinem Satze eine andere Fassung gegeben, durch die er auch in der äußeren Form dem Bernoullischen Satze viel näher kam. d'Arcy nannte nämlich, wie schon erwähnt, das Produkt aus der Bewegungsgröße und dem Lote die Wirkung eines Körpers um einen Punkt und sprach dann den Satz von der Erhaltung der Flächenmomente in der Form aus, daß die gesamte Wirkung eines Systems um einen Punkt eine konstante Größe sei (falls eben keine äußeren Kräfte wirken).

Wie der Schwerpunktsatz, so hat auch der Satz von der Erhaltung der Flächenmomente seine allgemeinste Fassung durch Lagrange erhalten, dessen Gedankengange[2] wir uns im folgenden im wesentlichen anschließen wollen (wenn wir auch hier wiederum die streng algebraische Darstellung von Lagrange bisweilen durch eine etwas physikalischere ersetzen wollen).

Wir gehen hierzu wieder von den Bewegungsgleichungen eines einzelnen Punktes des Systemes aus und bezeichnen wieder mit $\mathfrak{R}_h$ die Resultierende aus allen äußeren Kräften, die in dem h-ten Punkte des Systems angreifen und mit $\mathfrak{R}'_{hk}$ die innere Kraft, die auf den h-ten Massenpunkt von dem k-ten ausgeübt wird. Die Bewegungsgleichungen des h-ten Punktes lauten dann, wie wir sahen,

$$(12) \qquad \begin{cases} m_h \cdot \dfrac{d^2 x_h}{dt^2} = X_h + \sum{}' X'_{hk}, \\ m_h \cdot \dfrac{d^2 y_h}{dt^2} = Y_h + \sum{}' Y'_{hk}, \\ m_h \cdot \dfrac{d^2 z_h}{dt^2} = Z_h + \sum{}' Z'_{hk}, \end{cases}$$

wobei wieder die mit einem Striche versehenen Summen über alle ganzzahligen Werte von k von 1 bis n mit Ausnahme von h zu bilden sind.

Die Integrationsmethode, die zu dem Satze von der Erhaltung der Flächenmomente führt, besteht nun darin, daß wir die mit y multiplizierte erste Gleichung von der mit x multiplizierten zweiten Gleichung subtrahieren, die Gleichung, die wir derart erhalten, für sämtliche Werte von h bilden und dann alle diese Gleichungen addieren. Wir erhalten dann auf der linken Seite

$$\sum m_h \left(x_h \frac{d^2 y_h}{dt^2} - y_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} \right).$$

Da aber eben diese Summe ein vollständiger Differentialquotient ist, so erhalten wir

[1] Hist. et mém. de l'acad. roy. des sciences de Paris, 1749, p. 531—538.

[2] Mécanique analytique, part. II, sect. III, § 2.

$$(13)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\sum m_h\left(x_h\frac{dy_h}{dt}-y_h\frac{dx_h}{dt}\right)= \\ \quad \sum(Y_h\cdot x_h-X_h\cdot y_h)+\sum{}'\sum(Y'_{hk}\cdot x_h-X'_{hk}\cdot y_h). \end{cases}$$

Es läßt sich nun zeigen, daß zufolge dem dritten Newtonschen Bewegungsgesetze die Doppelsumme dieser Gleichung stets verschwindet, wenn die Kräfte, die zwischen den einzelnen Massenpunkten wirken, in die Richtung der Verbindungslinie dieser Massenpunkte fallen; denn dann gelten die Beziehungen

$$(14)\qquad \begin{cases} X'_{hk}=\frac{K'_{hk}}{r_{hk}}(x_h-x_k), \\ Y'_{hk}=\frac{K'_{hk}}{r_{hk}}(y_h-y_k), \\ Z'_{hk}=\frac{K'_{hk}}{r_{hk}}(z_h-z_k). \end{cases}$$

Infolgedessen ist

$$(15)\qquad Y'_{hk}\cdot x_h-X'_{hk}\cdot y_h=\frac{K'_{hk}}{r_{hk}}(y_h\cdot x_k-x_h\cdot y_k).$$

Da aber nach dem dritten Newtonschen Bewegungsgesetze

$$\frac{K'_{hk}}{r_{hk}}=\frac{K'_{kh}}{r_{kh}}$$

sein muß, so ist

$$(16)\qquad (Y'_{hk}\cdot x_h-X'_{hk}\cdot y_h)+(Y'_{kh}\cdot x_k-X'_{kh}\cdot y_k)=0.$$

Wir setzen nun in dieser Gleichung wieder zunächst $h=1$ und bilden dann die Gleichungen für alle Werte von k mit Ausnahme von 1. Sodann setzen wir in der Gleichung $h=2$ und bilden nun die Gleichungen für sämtliche Werte von k mit Ausnahme von 2 und so fort. Wir erhalten derart, indem wir schließlich $h=n$ setzen, $n(n-1)$ Gleichungen. Addieren wir sie alle, so erhalten wir auf der linken Seite die mit 2 multiplizierte Doppelsumme der Gleichung (13), auf der rechten Seite hingegen Null. Die gleiche Überlegung kann man für die beiden analogen Gleichungen durchführen, die sich aus der Gleichung (13) durch zyklische Vertauschung der Koordinaten und der Kraftkomponenten ergeben.

Wirken also auf unser System keine äußeren Kräfte oder nur solche äußere Kräfte, die nach dem Koordinatenursprung gerichtet sind, so liefert die Gleichung (13) sofort drei erste Integrale für die $3n$ Bewegungsgleichungen des Systems. Diese ersten Integrale haben die Form

$$(17)\qquad \begin{cases} \sum m_h\cdot\omega^h_{xy}=C_1, \\ \sum m_h\cdot\omega^h_{yz}=C_2, \\ \sum m_h\cdot\omega^h_{zx}=C_3, \end{cases}$$

wobei C_1, C_2, C_3 Konstanten sind und die Summe der Projektionen

aller Flächenmomente auf die drei Koordinatenebenen bedeuten.[1]

Bei abgeschlossenen Systemen, bei denen die inneren Kräfte in den Verbindungslinien der Massenpunkte wirken, gilt also der Satz von der Erhaltung der Flächenmomente stets, zu welchem Punkte immer man auch die Leitstrahlen zieht. Ferner gilt der Satz für solche Systeme, die äußeren, aber nach einem einzigen Punkte gerichteten Kräften unterliegen, falls man zu diesem Punkte die Leitstrahlen zieht. Wirken schließlich auf das System beliebige äußere Kräfte, so kann man doch auf Grund der Formeln (10) und (13) die sehr einfachen Beziehungen aufstellen

$$(18)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\sum L_x = \sum M_x, \\ \frac{d}{dt}\sum L_y = \sum M_y, \\ \frac{d}{dt}\sum L_z = \sum M_z, \end{cases}$$

— Beziehungen, die durchaus ähnlich sind denjenigen, die für das Flächenmoment eines einzelnen materiellen Punktes gelten, die aber auch eine unverkennbare Analogie mit den Gleichungen[2] besitzen, die sich aus dem Schwerpunktssatze ergeben.

[1] Dieses Resultat kann man (wie hier nur nebenbei erwähnt sei) auch, wie Laplace entdeckte, in der Form aussprechen, daß die Summe der Flächenmomente eines abgeschlossenen Systems stets in bezug auf eine und dieselbe, in ihrer Lage „invariable" Ebene seinen größten Wert besitzt (Mécanique céleste, part. I, livre I, chap. V, § 22).

[2] Vorl. 11, Gleichung (17).

Dreizehnte Vorlesung.

Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, den wir nach dem Schwerpunkts- und Flächensatze als drittes Integralprinzip der Mechanik kennen lernen wollen, hat seine Begründung durch Christian Huygens gefunden; doch reicht seine Vorgeschichte bis zu Galilei zurück, der für die spätere Entwicklung des Prinzipes der lebendigen Kraft namentlich durch drei wichtige Erkenntnisse von Bedeutung wurde, die er bei der Betrachtung der Bewegungen einzelner Körper gewann.

Zunächst finden wir nämlich (wie wir schon in einer früheren Vorlesung[1] sahen) bei Galilei das wichtige Theorem, daß die Geschwindigkeit, die durch eine Abwärtsbewegung längs einer schiefen Ebene ein Körper erlangt, stets so groß sein muß, daß der Körper, wenn er sich mit dieser Geschwindigkeit längs einer anderen, irgendwie geneigten Ebene aufwärts bewegt, doch wieder (falls keine Bewegungshindernisse vorhanden sind) bis zu derselben Höhe emporsteigt, von der er herabfiel.

Mit diesem Theoreme hängt, wie wir sahen, auf das engste ein zweiter wichtiger von Galilei ausgesprochener Satz zusammen, dem zufolge die Geschwindigkeitswerte, die Körper durch den Fall auf verschieden geneigten Ebenen erlangen, dennoch einander gleich sind, woferne nur die Höhen der Ebenen dieselben sind. Galilei erkannte so bereits deutlich, daß der Wert der erlangten Geschwindigkeit lediglich von dem seit Beginn der Bewegung zurückgelegten Höhenunterschiede abhängt, dagegen völlig unabhängig ist von der Länge, von der Neigung und von der Form der Bahn.

Schließlich hat Galilei die wichtige Beziehung ermittelt, daß bei dem freien Falle die erlangte Geschwindigkeit proportional ist der Quadratwurzel aus der Fallhöhe. Aus der Verbindung dieser Beziehung mit den beiden früheren Theoremen folgt ohne weiteres die wichtige (wenn auch von Galilei nicht ausdrücklich ausgesprochene) Erkenntnis, daß bei einer beliebigen unter dem Einflusse der Schwere erfolgenden Bewegung doch immer das Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist der Fallhöhe oder, was dasselbe ist, proportional ist der Höhe,

[1] Vorl. 5.

bis zu der infolge seiner Geschwindigkeit der Körper (etwa auf einer schiefen Ebene) aufsteigen könnte.

Diese Erkenntnisse Galileis haben nun ihre weitere Ausgestaltung durch Christian Huygens gefunden, der durch eine geniale Erweiterung der Galileischen Ideen ein Problem zu lösen wußte, um dessen völlige Lösung sich die größten seiner Zeitgenossen vergeblich bemüht hatten.

Im Jahre 1646 stellte nämlich Mersenne den Physikern die Preisaufgabe, für verschieden gestaltete Körper den Schwingungsmittelpunkt zu berechnen, d. h. die Länge eines mathematischen Pendels zu bestimmen, das mit dem betreffenden Körper isochron schwingt. Eine vollständige und exakte Lösung glückte keinem der großen Physiker, die Antworten sandten, weder Descartes noch Honoré Fabri, sondern erst zwei Jahrzehnte später Huygens, als diesen seine Versuche über die Vervollkommnung der von ihm erfundenen Pendeluhr neuerdings zu der von Mersenne gestellten Aufgabe führten.

Die Lösung der schwierigen Aufgabe gelang nun Huygens dadurch, daß er die Ideen, die bei Galilei zunächst nur auf die Dynamik eines einzelnen freien Massenpunktes angewendet erscheinen, auf ein System von beliebig vielen und beliebig untereinander verbundenen Massenpunkten ausdehnte.

In dem zweiten Teile seines berühmten, 1673 erschienenen Werkes über die Pendeluhr (Horologium oscillatorium) bringt darum zunächst Huygens die Galileischen Lehrsätze in ihrer Anwendung auf den frei beweglichen einzelnen Massenpunkt, jedoch ausführlicher und genauer;[1] erst im vierten Teile des Werkes vollzieht Huygens dann den Übergang von der Dynamik des einzelnen Massenpunktes zu der des starren Körpers vermittelst eines Satzes, den er an die Spitze seiner Untersuchung stellt und den er folgendermaßen ausspricht:

„Wenn beliebig viele schwere Körper sich infolge ihrer Schwere zu bewegen beginnen, so kann ihr gemeinsamer Schwerpunkt nicht höher steigen, als er sich bei Beginn der Bewegung befand."[2]

Diesen wichtigen Satz beweist Huygens derart, daß er ihn auf die selbstverständliche Annahme zurückführt, daß sich ein einzelner frei beweglicher, schwerer Körper nicht von selbst nach oben bewegen kann.[3] Denn aus dieser selbstverständlichen Annahme folgt nach

[1] Horologium oscillatorium, pars II, prop. 4, 6, 9, 10 und 11. Besonders interessant ist Satz 10, der folgendes lehrt: Fällt ein Körper vertikal oder längs einer geneigten Fläche und steigt er dann vermöge seiner Wucht längs irgend einer anderen Fläche empor, so wird er bei der Abwärts- und Aufwärtsbewegung in Punkten gleicher Höhe stets dieselbe Geschwindigkeit haben.

[2] Horologium oscillatorium, pars IV, hypoth. 1: Si pondera quotlibet vi gravitatis suae moveri incipiant; non posse centrum gravitatis ex ipsis compositae altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, ascendere.

[3] Ib.: Ipsa vero hypothesis nostra quominus scrupulum moveat, nihil aliud sibi velle eam ostendemus, quam quod nemo umquam negavit, gravia nempe sursum non ferri.

Huygens die etwas kompliziertere, vorhin erwähnte auf Grund der Tatsache, daß man ohne einen Aufwand an „Kraft" ein beliebig angeordnetes System von Körpern stets in eine Figuration überführen kann, bei der sich sämtliche Körper in der Höhe ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes befinden.

Daß dies tatsächlich der Fall ist, beweist Huygens folgendermaßen: Er denkt sich drei schwere Körper (1, 2, 3), die sich ursprünglich in *A*, *B* und *C* befinden (Fig. 35) und deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt *D* sei; und durch den Punkt *D* werde nun eine Horizontalebene gelegt. Dann kann man alle drei Körper ohne Aufwand an Kraft in diese Ebene bringen, wenn man mit Huygens folgendermaßen verfährt. Man verbindet die drei Körper durch unbiegsame starre Linien mit dem Punkt *D* und dreht nun das ganze System der Körper so lange, bis sich der erste Körper in der Horizontalebene im Punkte *E* befindet; dann ist zugleich durch die Drehung der zweite Körper von *B* nach *G* und der dritte von *C* nach *H* gelangt. Es erscheint aber Huygens selbstverständlich, daß bei dieser Drehung um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt keine Arbeit verrichtet wurde.

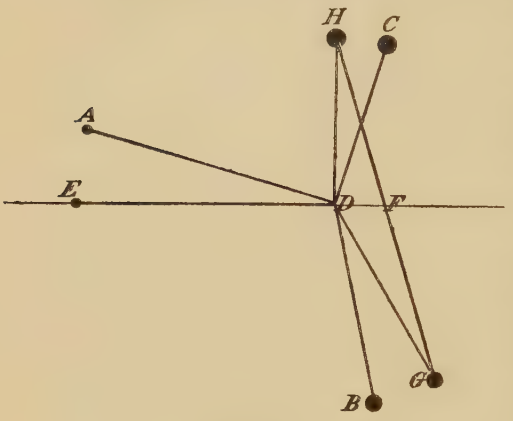

Fig. 35.

Nun denke man sich die starren Verbindungen entfernt und nur mehr den zweiten und dritten Körper miteinander durch eine starre Linie verbunden, die die Horizontalebene in dem Punkt *F* schneide. Man erkennt dann leicht, daß dieser Punkt *F* der gemeinschaftliche Schwerpunkt des zweiten und dritten Körpers sein muß. Denn da der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller drei Körper auch jetzt in der Horizontalebene liegt, der erste Körper sich aber selbst in dieser Ebene befindet, so muß natürlich auch der gemeinschaftliche Schwerpunkt des zweiten und dritten Körpers in dieser Ebene liegen; überdies liegt aber *F* in der Geraden, die den zweiten und dritten Körper verbindet.

Ist aber *F* der gemeinschaftliche Schwerpunkt des zweiten und dritten Körpers, so kann man natürlich ohne Aufwand an Kraft den zweiten und dritten Körper (während der erste unverändert an seiner Stelle bleibt) um den Punkt *F* derart drehen, daß sie beide in die Horizontalebene zu liegen kommen. Es ist demnach tatsächlich gelungen, ohne irgend einen Aufwand an Kraft die drei Körper, die sich zunächst in *A*, *B* und *C*, also in verschiedenen Höhen befanden, nur durch

ihre eigene Schwere alle in das Niveau ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes zu bringen.

Es unterliegt natürlich keiner Schwierigkeit, diese Überlegung auch für Systeme von mehr als drei Körpern auszudehnen. Aus der Tatsache nun, daß man ein System beliebiger schwerer Körper stets ohne Anwendung von „Kraft" in die durch den gemeinsamen Schwerpunkt gelegte Horizontalebene bringen kann — aus dieser Tatsache schließt nun Huygens, daß man für dynamisch-energetische Betrachtungen immer die tatsächliche Figuration eines Systems durch eine fingierte ersetzen kann, bei der sämtliche Körper des Systems in der Höhe ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes liegen. Hieraus folgert nun Huygens den schon erwähnten wichtigen und für seine weiteren Untersuchungen grundlegenden Satz, den er indessen, da ihm die Schlußweise offenbar doch nicht völlig exakt erscheint, ausdrücklich als Hypothese (Hypothesis I) bezeichnet und den er, wie gesagt, folgendermaßen formuliert: „Wenn beliebig viele schwere Körper sich infolge ihrer Schwere zu bewegen beginnen, so kann der gemeinsame Schwerpunkt aller dieser Körper nicht höher steigen, als er sich zu Beginn der Bewegung befand."

Denn nehmen wir an, zu Beginn der Bewegung habe die irgendwie beschaffene Figuration I bestanden, bei der sich der Schwerpunkt des Systems im Niveau a befand; dann läßt sich nach dem früheren ohne weiteres zeigen, daß es unmöglich ist, daß bloß unter dem Einflusse der eigenen Schwere das System in eine Figuration II übergehe, bei der sich der Schwerpunkt in einem höheren Niveau, etwa im Niveau b befindet.

Denn nach dem früher Bewiesenen können wir ja ohne einen Aufwand an Kraft in die Figuration I eine andere I′ verwandeln, bei der sich sämtliche Körper im Niveau a befinden und ebenso können wir ohne einen Aufwand an Kraft die Figuration II in eine ihr äquivalente II′ umgestalten, bei der sich sämtliche Körper im Niveau b befinden. Da der Übergang aus der Figuration I′ in die Figuration I und ebenso der Übergang aus der Figuration II in die Figuration II′ also keinen Aufwand an Kraft erfordert, müßte es demnach, wenn die Huygenssche Hypothese I nicht gelten würde, möglich sein, eine Gruppe von Körpern, die sich durchwegs in dem Niveau a befinden, ohne Aufwand an Kraft, sämtlich in ein höheres Niveau b zu bringen. Da dies aber natürlich unmöglich ist, so muß eben die Huygenssche Hypothese I gelten.

Diese Hypothese I verknüpft nun Huygens mit der (von ihm als Hypothese II bezeichneten) Erfahrungstatsache, daß der Satz von der Gleichheit der Bogen bei dem Absteigen und Aufsteigen, den Galilei für das mathematische Pendel aufgestellt hatte, auch bei dem physischen Pendel für die Bewegung seines Schwerpunktes gelte. Wenn aber nun einerseits (unter der Voraussetzung, daß keine Bewegungshindernisse vorhanden sind) infolge der Hypothese II der Schwerpunkt des

physischen Pendels bei dem Aufsteigen stets wieder bis zu der Höhe gelangt, von der er herabfiel, und wenn andererseits, welcher Art auch immer die Verbindungen zwischen den Teilen des Systems sind, dennoch infolge der Hypothese I der Schwerpunkt des Systems nie durch die eigene Schwere sich über seine ursprüngliche Höhe erheben kann — dann wird, so folgert Huygens[1], die Höhe, bis zu der der Schwerpunkt des physischen Pendels wieder emporsteigt, völlig unbeeinflußt bleiben von Veränderungen, die man während der Bewegung an den starren Verbindungen vornimmt, die zwischen den einzelnen Teilen des physischen Pendels bestehen.

Der Schwerpunkt eines physischen Pendels steigt, falls man vom Reibungs- und Luftwiderstand absieht, also nach der Hypothese II wieder bis zu der Höhe empor, von der er herabfiel; er muß es aber, wie Huygens mit genialem Scharfblicke erkannte, auch dann tun, wenn man in irgend einem Augenblicke der Bewegung — ganz gleichgültig, in welchem — plötzlich alle die starren Verbindungen, die zwischen den einzelnen Massenpunkten bestehen und die ihre Bewegungsfreiheit einschränken, zerschneidet und jeden der einzelnen **nunmehr freien** Massenpunkte bis zu der Höhe emporsteigen läßt, bis zu der er sich mit der Geschwindigkeit, die er im Augenblicke des Zerschneidens der Verbindungen inne hatte, aufwärts bewegen kann. Wir denken uns z. B., daß von einem festen Punkte an zwei Fäden zwei schwere Massen herabhängen mögen. Wir verbinden dann die beiden Massen durch einen unbiegsamen gewichtslosen Draht (der genau so lang sei wie der Längenunterschied der beiden Fäden). Wir setzen das derart konstruierte physische Pendel sodann in Bewegung und zerschneiden, nachdem es eine Reihe von untereinander gleichen Schwingungen ausgeführt habe, dann plötzlich den Draht. (Von Reibung und Luftwiderstand sehen wir dabei natürlich ab). Die beiden Massen werden jetzt allerdings an ihren Fäden bis zu anderen Höhen emporsteigen, als sie es bei den früheren Schwingungen taten; die eine wird weniger hoch, die andere noch höher steigen. In dem Verhalten des Schwerpunktes wird aber durch das Zerschneiden des Drahtes nicht die mindeste Änderung eintreten.

Die Höhe, bis zu der der Schwerpunkt eines nur dem Einflusse der eigenen Schwere unterliegenden Systems von einem beliebigen Augenblicke der Bewegung an steigt, ist also (wenn keine Bewegungshindernisse vorhanden sind) immer gleich dem vertikalen Niveauunterschiede zwischen der augenblicklichen und der ursprünglichen Lage des Schwerpunktes — auch dann, wenn man in dem betreffenden, beliebig zu wählenden Augenblicke plötzlich das physische Pendel in ein System von untereinander unabhängigen einzelnen, losen, mathematischen Pendeln **auflöst.**

[1] Horol. oscill., pars IV, prop. 4.

Nennen wir den Niveauunterschied zwischen der augenblicklichen und der ursprünglichen Lage des Schwerpunktes H_1 und die Höhe, bis zu der der Schwerpunkt bei Fortbestand der Verbindungen emporsteigen würde, H_2 und diejenige Höhe, die der Schwerpunkt des losen Systems nach Beseitigung der Verbindungen erreichen würde, H_3, so muß also

$$H_1 = H_2 = H_3 \tag{1}$$

sein. Dies ist das für die weitere Entwicklung der Mechanik so ungemein bedeutungsvolle Theorem, auf das Huygens seine Berechnung des Schwingungsmittelpunktes gründete und das er etwa folgendermaßen beweist.

Daß der Schwerpunkt der „befreiten" Massen nicht über das Niveau steigen kann, in dem er sich bei Beginn der Bewegung befand (als noch die Massen verbunden waren), folgt aus dem Satze, daß der gemeinsame Schwerpunkt eines Systems von irgendwie untereinander verbundenen Massen nie von selbst in ein höheres Niveau gelangen kann. Denn der Schwerpunkt — so müßte man ergänzend hinzufügen — könnte nur bei einem Aufwande an Kraft über das ursprüngliche Niveau gebracht werden; die Auflösung der Verbindungen ist aber ein Vorgang, den man sich ohne Energieumsatz ausgeführt denken kann.

Daß der Schwerpunkt andererseits (unter der Voraussetzung, daß keine Bewegungshindernisse vorhanden sind) aber auch nicht unter der ursprünglichen Höhe zurückbleiben kann, zeigt Huygens auf Grund des (Galileischen) Prinzipes von der völligen Umkehrbarkeit des idealen dynamischen Prozesses. Aus der Annahme, daß der Schwerpunkt unter der ursprünglichen Höhe zurückbleibt, würde man dann, indem man den Sinn des Vorganges in Gedanken umkehrt, wieder zu der absurden Folgerung geführt werden, daß ein schwerer Körper unter dem Einflusse der eigenen Schwere sich aufwärts bewegen könne, was ja eben unmöglich ist.

Auf Grund seines Theoremes kann nun Huygens die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der Drehachse, die sogenannte reduzierte Pendellänge, durch eine sehr hübsche Überlegung finden, die man in etwas veränderter und vereinfachter Form etwa folgendermaßen wiedergeben kann. Huygens geht von der Tatsache aus, daß infolge der starren Verbindungen die Geschwindigkeiten der einzelnen Teile des physischen Pendels stets ihren Abständen von der Drehachse proportional sein müssen. Betrachten wir daher in einem bestimmten Augenblicke einen beliebigen Punkt in der Entfernung r von der Drehachse, so hat er also, wenn die Winkelgeschwindigkeit des Pendels in diesem Augenblicke ω beträgt, die Geschwindigkeit $r\omega$, und daher ist die Höhe, bis zu der der Punkt mit dieser Geschwindigkeit in freiem

Zustande aufsteigt, wenn in dem betreffenden Augenblick alle seine Verbindungen aufgelöst werden,

$$h_3 = \frac{r^2 \omega^2}{2g}. \tag{2}$$

Die Höhe, bis zu der der Schwerpunkt aller „befreiten" Massen steigt, ist aber[1] durch die Gleichung gegeben

$$H_3 \cdot \sum m = \sum m h_3;$$

es ist daher

$$H_3 = \frac{\omega^2}{2g} \cdot \frac{\sum m r^2}{\sum m}. \tag{3}$$

Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt in der Achse des Pendels (das heißt in der Geraden, die durch den Schwerpunkt geht und auf der Drehachse senkrecht steht), etwa in der Entfernung x von der Drehachse, so ist, wie man ohne weiteres erkennt, im Augenblicke der Auflösung der Verbindungen sein vertikaler Abstand von dem ursprünglichen Niveau

$$h_1 = H_1 \cdot \frac{x}{d}, \tag{4}$$

wenn d der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse ist. Die Höhen, bis zu denen die einzelnen Massenpunkte im befreiten und im verbundenen Zustande wieder aufsteigen werden (h_3 und h_2), werden im allgemeinen natürlich nicht gleich groß sein. Es wird also im allgemeinen, da ja immer $h_2 = h_1$ sein muß, h_3 einen anderen Wert haben als h_1.

Wenn es aber — so schließt Huygens — tatsächlich einen Schwingungsmittelpunkt gibt, nämlich einen Punkt (der aber ebenso wie dies bei dem Schwerpunkte der Fall ist, keineswegs einem tatsächlichen physikalischen Massenpunkte entsprechen muß), wenn es also einen Punkt gibt, auf dessen Verhalten seine Verbindungen mit den anderen Punkten gar keinen Einfluß haben, der also auch im freien Zustande nicht anders schwingen würde, als er es als Bestandteil des physischen Pendels tut, dann muß für ihn die Relation

$$h_3 = h_1 \tag{5}$$

unabhängig von dem Zeitpunkte, in dem die Auflösung der Verbindungen vorgenommen wird, erfüllt sein, also unabhängig von dem für jeden Augenblick verschiedenen Werte von ω.

Einen solchen Punkt gibt es, wenn aus der letzten Gleichung (5) ω herausfällt, und dies ist tatsächlich der Fall. Denn bezeichnen wir die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der Drehachse mit l

[1] Vgl. Vorl. 11, Gleichungen (7).

und bezeichnen wir die für den Schwingungsmittelpunkt geltenden Werte von h mit einem Sterne, so ist nach Gleichung (2)

$$h_3^* = \frac{l^2 \omega^2}{2g}$$

und nach Gleichung (4)

$$h_1^* = H_1 \frac{l}{d}$$

oder, da ja nach Gleichung (1)

$$H_1 = H_3$$

ist, zufolge der Formel (3)

$$h_1^* = \frac{\omega^2 l}{2g d} \cdot \frac{\sum m r^2}{\sum m}.$$

Indem man h_1^* und h_3^* einander gleich setzt, findet man

(6) $$l = \frac{\sum m r^2}{d \cdot \sum m}.$$

Man erhält also, wie Huygens richtig findet, die reduzierte Pendellänge, indem man „die Masse jedes Teiles mit dem Quadrate seines Abstandes von der Schwingungsachse multipliziert; sodann die Gesamtmasse der Teile mit dem Abstande ihres Schwerpunktes von der Schwingungsachse multipliziert und sodann die Summe der erstgenannten Produkte durch das an zweiter Stelle genannte Produkt dividiert".[1]

— — — In der ursprünglichen Fassung lehrte das Huygenssche Theorem, wie wir sahen, daß die Höhe, bis zu der von dem Augenblicke des fingierten Zerschneidens der Verbindungen an der Schwerpunkt des nunmehr losen Systems aufsteigen würde, daß dieser sogenannte „potentielle Aufstieg" immer gleich sein muß dem „aktuellen Abstieg", nämlich der Höhe, die von Beginn der Bewegung an bis zu dem Augenblicke der fingierten Auflösung der Verbindungen der Schwerpunkt des bis dahin also noch verbundenen Systems tatsächlich in vertikalem Sinne zurücklegte.

Dieses Prinzip der „aequalitas inter descensum actualem ascensumque potentialem"[2] hat in der Geschichte der Physik noch lange eine große Rolle gespielt und ist namentlich von Daniel Bernoulli in sehr geistvoller Weise zur Lösung hydrodynamischer Aufgaben verwendet worden.

Man konnte dem Huygensschen Theoreme aber auch eine andere, vielleicht noch klarere Fassung geben, indem man es in Beziehung zu einem Begriffe brachte, dessen außerordentliche Wichtigkeit für die Physik als erster der große Philosoph Leibniz erkannt hat; es ist der Begriff der lebendigen Kraft (unter der man übrigens bis zum Beginne

[1] Horol. oscill, pars IV, prop. 5.

[2] Der Ausdruck stammt von Daniel Bernoulli (Hydrodynamica I, § 19).

des 19. Jahrhunderts[1]) nicht dieselbe Größe wie heute, sondern deren Doppeltes verstand).

Wir haben ja schon in einer früheren Vorlesung[2] von dem cartesianischen Krafterhaltungsgesetze gesprochen, dem zufolge die Größe Σmv in der Natur unverändert ihren Wert behalten müsse. Leibniz hat erkannt, daß die Größe mv unmöglich als Maß der „Kraft" gelten könne, wenn man das Wort Kraft hierbei in demselben Sinne gebrauche, wie in dem bekannten mechanischen Axiome, das bei Jordanus Nemorarius und bei Descartes, wie wir sahen[3], eine so große Rolle spielte und demzufolge dieselbe Kraft notwendig ist, um einen Körper vom Gewichte 1 bis zu der Höhe 1 oder einen Körper von dem Gewichte n bis zu der Höhe $\frac{1}{n}$ zu erheben. Denn da die Höhe, bis zu der ein Körper mittels seiner Kraft auf Grund seiner Geschwindigkeit aufsteigen kann, dem Quadrate dieser Geschwindigkeit proportional ist (wie schon Galilei fand), so kann das Axiom nur dann erfüllt sein, wenn man die Kraft eines Körpers durch das Quadrat seiner Geschwindigkeit mißt.

Leibniz hat darum, indem er von der Tatsache der Erhaltung der Kraft selbst fest überzeugt war, einfach in dem cartesianischen Krafterhaltungsgesetze das Produkt mv durch das von ihm als „lebendige Kraft" bezeichnete Produkt mv^2 ersetzt und somit gelehrt, daß die Summe der lebendigen Kraft im Weltall einen unveränderlichen Wert besitze.[4] Eine interessante, wenn auch nicht vollständige Bestätigung fand dieses von Leibniz ohne Begründung gegebene Gesetz durch Huygens' Feststellung, daß die Summe der lebendigen Kraft eines Systems von elastischen, starren Körpern durch Stöße, die zwischen diesen Körpern stattfinden, nicht geändert werden kann.[5]

Es lag also jedenfalls der Gedanke nahe, daß die gesamte lebendige Kraft, die durch irgend eine Bewegung ein System von untereinander verbundenen Körpern erlangt, durch die zwischen den Körpern bestehenden Verbindungen in keiner Weise beeinflußt werden kann; daß also die lebendige Kraft, die durch eine Bewegung ein System

---

[1] Die Neuerung, vor das Produkt aus Masse und Geschwindigkeitsquadrat noch den Faktor $^1/_2$ zu setzen, stammt von Coriolis (Calcul de l'effet des machines, Paris 1829, p. III).

[2] Vorlesung 6.

[3] Vorlesung 1.

[4] Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a Deo eandem semper quantitatem motus conservari, qua et in re mechanica abutuntur; erschienen 1686 in den Act. erud. Lips.; auch Gesammelte Werke, 3. Folge, 6. Bd., ed. Gerhardt Nr. IV.

[5] Huygens, Journal des Sçavans 1669, Mars: La somme des produits faits de la grandeur de chaque corps dur, multiplieé par le quarré de sa vitesse, est toujours la même devant et après la rencontre. Vgl. die nachgelassenen Schriften: De motu corporum ex percussione, Prop. XI.

von untereinander verbundenen Körpern erlangt, in jedem Augenblicke ebenso groß ist, wie wenn sich die einzelnen Massen von ihren Anfangslagen bis zu den Lagen, die sie in dem betreffenden Augenblicke haben, jede einzeln und frei von Verbindungen bewegt hätten — und das ist ein Theorem, das in der Tat mit dem Huygensschen Theoreme identisch ist.

Denn nach dem Huygensschen Theoreme muß ja

$$H_1 = H_3$$

und somit

$$\sum m h_1 = \sum m h_3 \tag{7}$$

sein. Nennen wir nun v' die Geschwindigkeiten, die die einzelnen Massen erlangt hätten, wenn sie sich einzeln und frei von Verbindungen aus der Anfangslage bis zu ihrer Lage in dem betrachteten Augenblicke bewegt hätten, so muß natürlich (nach Galilei)

$$v' = \sqrt{2 g h_1} \tag{8}$$

sein. Andererseits ist ja

$$h_3 = \frac{v^2}{2g}, \tag{9}$$

wenn wir unter v die Geschwindigkeit verstehen, die in dem betrachteten Augenblicke der Körper tatsächlich besitzt und die natürlich im allgemeinen (den Schwingungsmittelpunkt ausgenommen) von v' verschieden sein wird. Setzen wir nun die Werte aus den Gleichungen (8) und (9) in die Gleichung (7) ein, so finden wir in der Tat

$$\sum m v'^2 = \sum m v^2, \tag{10}$$

womit das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft erwiesen ist.

Auf die Möglichkeit dieser Fassung seines Theoremes hat schon Huygens selbst in einem seiner Briefe hingewiesen, indem er meinte, daß infolge der Erhaltung der „Aufsteigekraft", der „force ascensionelle", die Summe aus den einzelnen Massen und den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten konstant bleiben müsse und daß die Konstanz dieser Summe aber nicht nur bei dem physischen Pendel und dem Stoße elastischer Körper, sondern auch bei vielen anderen mechanischen Untersuchungen zu beobachten sei.[1]

Daniel Bernoulli hat dann in seiner „Hydrodynamik" dem Prinzipe noch eine andere, wenn auch im Wesen ganz gleiche Form gegeben, in-

[1] Oeuvres complètes de Christiaan Huygens (publiées par la société hollandaise des sciences), vol. IX, Lettre 2606 (datiert vom Jahre 1690), p. 463: Mais c'est une loy constante, que les corps doivent garder leur force ascensionelle, et que pour cela la somme des quarrez de leurs vitesses doit demeurer la même. Ce qui n'a pas seulement lieu dans le choc des corps durs, comme je l'ay remarqué au même endroit, mais aussi en beaucoup d'autres recherches de Mechanique.

dem er in der Gleichung (7) nur h_3 durch den Wert aus der Gleichung (9) ersetzte. Er erhielt somit, da ja

$$\sum m h_1 = H_1 \sum m$$

ist, die Gleichung

$$M \cdot g \cdot H_1 = \frac{m v^2}{2}. \tag{11}$$

Es muß also für jeden Augenblick der Bewegung die gesamte lebendige Kraft des Systems gleich sein dem Produkte aus dem gesamten Gewichte des Systems und der Höhe, die seit Beginn der Bewegung in vertikalem Sinne der Schwerpunkt des Systems zurücklegte.

Vierzehnte Vorlesung.

Die Entstehung des Potentialbegriffes.

Das Huygenssche Theorem von der „Erhaltung der lebendigen Kraft" hat, wie es selbst durch eine Verschmelzung mannigfacher und eigentlich noch nicht völlig fertiger physikalischer Ideen entstanden ist, so auch seinerseits wieder zu der Ausbildung verschiedener neuer Prinzipe und Begriffe geführt. Ehe wir darum zu der weiteren Entwicklung der Probleme übergehen, die sich aus der Betrachtung der starren Verbindungen bei dem physischen Pendel ergaben, wollen wir uns in dieser Vorlesung zunächst mit der Entstehungsgeschichte eines Begriffes befassen, der auf das engste mit dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft zusammenhängt und der allmählich eine außerordentliche Bedeutung nicht nur für die Mechanik, sondern für die ganze Physik erlangen sollte; es ist dies der Begriff des Potentials.

Den Keim des Potentialbegriffes müssen wir wohl in der schon erwähnten[1] wichtigen Erkenntnis Galileis erblicken, daß für die Größe der Geschwindigkeit, die ein Körper bei einer beliebigen Abwärtsbewegung unter dem Einflusse der Schwere erlangt, einzig und allein der in vertikalem Sinne zurückgelegte Höhenunterschied maßgebend ist.

Diese Erkenntnis Galileis hat nun eine sehr wichtige Erweiterung durch einen Lehrsatz gefunden, den zuerst Leonhard Euler in seiner 1736 erschienenen „Mechanik" mitgeteilt hat.[2] Euler zeigte nämlich, daß die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers, der gegen ein festes Zentrum mit einer Kraft gezogen wird, die nur eine Funktion der Entfernung von dem Zentrum ist, in jedem Augenblicke einzig und allein von der jeweiligen Distanz vom Zentrum abhängt; daß also auch bei einer derartigen Bewegung — ebenso wie in dem Spezialfalle einer Bewegung unter dem Einflusse der Schwere — die Geschwindigkeit, die der Körper in einem bestimmten Punkte besitzt, ganz unabhängig ist von der Form der Bahn, auf der er zu diesem Punkte gelangte.

---

[1] Vgl. Vorl. 5.

[2] Mechanica sive motus scientia analytice exposita, pars II, § 195.

Daß dies tatsächlich der Fall ist, beweist Euler auf Grund der ersten seiner „natürlichen Bewegungsgleichungen“[1], derzufolge für die Tangentialkomponente der Kraft die Beziehung gilt

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = K_t. \tag{1}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der Formel

$$v \cdot dt = ds,$$

so erhält man die Gleichung

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = K_t \cdot ds; \tag{2}$$

hierbei besteht die Beziehung, daß

$$K_t = K \cdot \cos(\mathfrak{K}, d\mathfrak{s}). \tag{3}$$

Wenn aber nun die Kraft nach einem bestimmten Zentrum gerichtet ist, dann muß stets, wie man ohne weiteres erkennt (Fig. 36), die Beziehung gelten

$$dr = ds \cdot \cos(\mathfrak{K}, d\mathfrak{s}),$$

wenn wir unter dr die Größe verstehen, um die sich in derselben Zeit, in der der Körper die Strecke $d\mathfrak{s}$ zurücklegte, der Körper dem Zentrum näherte. Es ist also

$$K_t = K \cdot \frac{dr}{ds}, \tag{4}$$

und somit ergibt sich durch Integration der Gleichung (2) die Beziehung

$$\frac{mv^2}{2} = \int K \cdot dr + \text{konst.} \tag{5}$$

Das Produkt $K \cdot dr$ ist aber stets integrabel, wenn K eine Funktion von r als einziger Veränderlichen ist. Ist dies aber der Fall, so kann die Geschwindigkeit, die in einem bestimmten Augenblicke der Körper besitzt, außer von dem unveränderlichen Werte der Integrationskonstanten einzig und allein von der Entfernung abhängen, die er in dem betreffenden Augenblicke von dem Mittelpunkte hat; der Wert der Integrationskonstanten ist uns aber gegeben, sobald wir den tatsächlichen Wert der Geschwindigkeit in einer einzigen beliebigen Entfernung von dem Mittelpunkte kennen.

Die Änderung der lebendigen Kraft, die der Körper bei einer Bewegung zwischen zwei Punkten erfährt, ist also — so können wir auch sagen — völlig unabhängig von der Form der Bahn, die von dem ersten zu dem zweiten Punkte führt. Die Änderung der lebendigen Kraft bleibt auch ganz dieselbe, wenn man jeden der beiden Punkte

[1] Vorl. 7, Gleichungen (10).

durch einen anderen, beliebig gewählten Punkt in der gleichen Entfernung vom Mittelpunkte ersetzt. Das einzige, was für die Änderung der lebendigen Kraft maßgebend ist, ist die Änderung in der Distanz vom Mittelpunkte. Damit aber diese einfachen Verhältnisse bestehen, ist es eben notwendig, daß der Ausdruck $K \cdot dr$ integrabel ist, was eben, wie Euler erkannte, stets der Fall ist, wenn erstens die Kraft nur eine Funktion des Abstandes von einem festen Mittelpunkte und zweitens stets gegen diesen gerichtet ist (denn nur dann, wenn die zweite Bedingung erfüllt ist, wird eben die Gleichung (4) bestehen).

Diese Erkenntnis, die Euler unter der Voraussetzung gewonnen hatte, daß die Kraft gegen ein festes Zentrum gerichtet ist, hat dann Daniel Bernoulli in einer Abhandlung, die 1748 in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie erschien[1], auch auf den Fall ausgedehnt, daß die Kräfte nicht gegen feste Zentren, sondern gegen Körper gerichtet sind, die selbst dem Systeme angehören und somit beweglich sind. Insbesondere hat Daniel Bernoulli in dieser Abhandlung auch bereits gezeigt, daß bei einem Systeme von beliebig vielen Körpern, die einander im umgekehrt quadratischen Verhältnisse ihrer Entfernung anziehen, die Änderung, die durch den Übergang des Systems aus einer Figuration in eine andere in dem Gesamtbetrage der lebendigen Kraft des Systems hervorgerufen wird, vollkommen bestimmt ist durch die Summe der Änderungen, die durch den Lagenwechsel die reziproken Werte der Distanzen der einzelnen Körper voneinander erfahren.

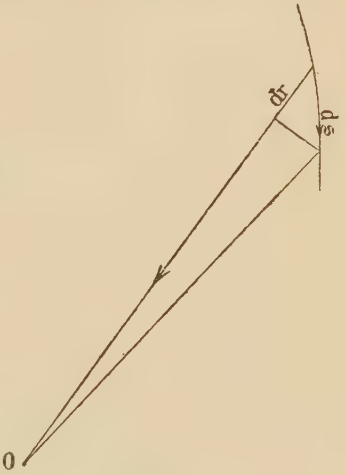

Fig. 36.

Euler hat nun (wie schon in einer früheren Vorlesung erwähnt wurde[2]) die wichtigsten Resultate seiner 1736 erschienenen Mechanik in der Einleitung zu seiner 1765 veröffentlichten „Theoria motus corporum solidorum" auch in die Sprache der analytischen, mit drei festen Koordinatenachsen arbeitenden Geometrie übersetzt, und dadurch erhielt auch die Gleichung (2) dieser Vorlesung eine etwas deutlichere Gestalt.[3]

---

[1] Remarques sur le principe de la conservation des forces vives pris dans un sens général; Histoire de l'académie royale de Berlin, 1748, p. 356—366. Deutsch in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, Bd. 191.

[2] Vgl. Vorl. 8.

[3] Theoria motus corporum solidorum, Introductio, cap. 5, prop. 16.

Euler ging von den Bewegungsgleichungen des freien materiellen Punktes in orthogonalen Koordinaten[1] aus

$$(6) \qquad \begin{cases} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X, \\ m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \\ m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \end{cases}$$

Er multiplizierte nun — und hierin besteht die Integrationsmethode, die zu dem Satze der lebendigen Kraft und damit unter gewissen Voraussetzungen zu einem ersten Integrale der Bewegungsgleichungen führt — die erste Gleichung mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz und addierte dann. Er erhielt derart

$$(7) \qquad m\left(\frac{d^2x}{dt^2} \cdot dx + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dy + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot dz\right) = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz.$$

Da aber nun der links eingeklammerte Ausdruck ein vollständiges Differential darstellt, und zwar von

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \text{ oder}^2 \ \frac{1}{2}v^2,$$

so folgt aus der Integration der Bewegungsgleichungen nach der angegebenen Methode

$$(8) \qquad \frac{mv^2}{2} = \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) + \text{konst.}$$

Es wird also, wie man auch sagen kann — Euler selbst sagt es allerdings nicht ausdrücklich —, die Änderung der lebendigen Kraft von der Form der Bahn unabhängig und durch Anfangs- und Endlage vollständig bestimmt sein, wenn der Ausdruck $(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$ ein vollständiges Differential ist, d. h. wenn eine Funktion von x, y, z existiert, deren Differential gleich ist der Summe der Produkte $X \cdot dx$, $Y \cdot dy$, $Z \cdot dz$.

Zu einem ganz analogen Resultate war bei der Behandlung eines ganz anderen Problemes schon im Jahre 1743 der Pariser Physiker Clairault geführt worden. Clairault untersuchte im Zusammenhange mit dem Probleme der Erdgestalt[3] die Frage, wann eine rotierende Flüssigkeit, die nur dem Einflusse der gegenseitigen Attraktion ihrer Teile unterliegt, im Gleichgewichte sein könne; und Clairault

[1] 8. Vorlesung, Gleichungen (4).

[2] Nach Vorl. 8, Gleichungen (3).

[3] Vgl. E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 3. Kap., 10; eine sehr ausführliche Darstellung findet man bei J. Todhunter, „A history of the mathematical theories of attraction and figure of the earth, from the time of Newton to that of Laplace", London 1873.

erkannte als Gleichgewichtsbedingung, daß in einem Kanale, den man zwischen zwei beliebigen Punkten innerhalb der Flüssigkeit führt, der Druckunterschied an den beiden Enden von der Form des Kanals unabhängig sein muß. Diese Unabhängigkeit kann aber, wie Clairault fand (falls die Dichte der Flüssigkeit konstant ist), nur dann bestehen, wenn der Ausdruck $(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$ ein vollständiges Differential ist, wenn man wieder unter X, Y, Z die Komponenten der wirkenden Kraft versteht.[1]

Nun hatte Clairault schon im Jahre 1740[2] das wichtige mathematische Theorem gefunden, daß ein Ausdruck von der Form

$$A \cdot dx + B \cdot dy,$$

wobei sowohl A als auch B Funktionen von x und y seien, immer dann, aber auch nur dann ein vollständiges Differential darstellt, wenn die Beziehung erfüllt ist

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.^{3} \tag{9}$$

Ebenso müßte, wie Clairault fand, damit ein Ausdruck von der Form

$$A \cdot dx + B \cdot dy + C \cdot dz$$

ein vollständiges Differential darstelle, die notwendige, aber hinreichende Bedingung erfüllt sein

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}. \tag{10}$$

Clairault konnte somit eine sehr einfache Methode angeben, durch die man sich davon überzeugen kann, ob tatsächlich bei seinen „Flüssigkeitskanälen" die Differenz des Druckes an den beiden Enden des Kanals von dessen Form unabhängig ist; und durch ganz dieselbe Methode kann man natürlich auch bei dem von Euler untersuchten kinematischen Probleme es entscheiden, ob tatsächlich die Änderung der lebendigen Kraft von der Form der Bahn unabhängig ist. Man braucht hierzu nur zu prüfen, ob die drei Gleichungen erfüllt sind

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

[1] Clairault, Théorie de la figure de la terre (Paris 1743; deutsch in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 189); cap. 4.

[2] Sur l'intégration des équations differentielles du premier ordre; Mémoires de l'académie royale de Paris, 1740, p. 293.

[3] Einen einfachen Beweis dieses Satzes findet man in jedem Lehrbuche der Differential- und Integralrechnung.

Sind diese drei Gleichungen erfüllt, so können wir dessen sicher sein, daß die gesamte Änderung, die bei einer Bewegung die lebendige Kraft erfährt, durch die Anfangs- und Endlage völlig bestimmt ist.

Das bisher über die Vorgeschichte der Potentialtheorie Gesagte können wir also folgendermaßen zusammenfassen. Galilei hat ermittelt, daß bei einer unter dem Einflusse der Schwere erfolgenden Bewegung der Wert der Geschwindigkeit nur von dem seit Beginn der Bewegung in vertikalem Sinne zurückgelegten Höhenunterschiede abhängt, dagegen von der Form der Bahn unabhängig ist. Euler hat entdeckt, daß sich der Galileische Satz auf den Fall verallgemeinern läßt, daß die wirksame Kraft nach einem bestimmten Zentrum gerichtet und irgend eine Funktion der Entfernung von dem Zentrum, aber eben nur eine Funktion der Entfernung ist. Daniel Bernoulli hat dann nachgewiesen, daß das Eulersche Resultat auch dann seine Gültigkeit behält, wenn die Kräfte nicht nach festen Zentren gerichtet sind, sondern zwischen den Körpern des Systems in der Richtung ihrer Verbindungslinien wirken.

Andererseits hat Clairault bei der Behandlung eines hydrostatischen Problems festgestellt, daß eine der kinematischen ganz analoge „hydrostatische Unabhängigkeit" besteht, wenn der Ausdruck $(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$ ein vollständiges Differential ist; auf Grund eines von ihm schon früher aufgefundenen Theorems konnte Clairault die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben, bei deren Erfüllung dies der Fall ist. Euler hat dann, als er seine früheren Forschungsergebnisse unter Benutzung eines festen Koordinatensystems neu formulierte, eine Gleichung aufgestellt, aus der man es ohne weiteres herauslesen kann, daß die Änderung der lebendigen Kraft nur dann, aber auch immer dann von der Form des Weges unabhängig ist, wenn auch hierbei wieder $(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$ ein vollständiges Differential ist; andererseits geht aber aus den früheren Untersuchungen von Euler und denen von Daniel Bernoulli hervor, daß dies immer dann der Fall sein muß, wenn die Kraft eine Funktion der Entfernung von dem festen Zentrum oder einem anderen Körper ist und zu dem Zentrum oder dem Körper hin gerichtet ist.

In den Fällen, in denen nun der eine so große Rolle spielende Ausdruck $(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$ tatsächlich ein vollständiges Differential ist, also gleich dem Differentiale irgend einer Funktion von x, y und z ist, die wir etwa Φ nennen wollen, — in diesen Fällen muß es nun jedenfalls eine außerordentliche Vereinfachung des Problems bedeuten, wenn man in die theoretischen Betrachtungen die Funktion Φ selbst einführt. Man kann dann z. B. sofort sagen, daß die Änderung, die während einer beliebigen Bewegung die lebendige Kraft erfährt, immer gleich sein muß dem Unterschiede der Werte, die die Funktion Φ zu Beginn und zu Ende der Bewegung hatte.

Diese Funktion ist nun in der Tat im Jahre 1773 von Lagrange[1] in die Physik eingeführt worden, zunächst unabhängig von dem Prinzipe der Erhaltung der lebendigen Kraft und vielmehr wegen einer anderen wichtigen und wertvollen Eigenschaft, die diese Funktion besitzt und die die Darstellung der Komponenten der in einem System wirksamen Kräfte ganz außerordentlich vereinfacht. Die Überlegung, die Lagrange zu dem Potentialbegriffe führte, war aber folgende.

Lagrange betrachtet zwei Massen, die einander mit irgend einer Kraft anziehen, deren Größe wir K nennen wollen und die in die Richtung der Verbindungslinie fällt. Die Koordinaten der einen Masse, die wir uns mit dem Koordinatensysteme fest verbunden denken, seien a, b, c, die der anderen Masse x, y, z. Die Verbindungslinie der beiden Massen habe die Länge r und bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ; dann sind die Komponenten der Kraft, da diese die Richtung der Verbindungslinie hat,

$$(12) \qquad \begin{cases} X = K \cdot \cos\alpha\,, \\ Y = K \cdot \cos\beta\,, \\ Z = K \cdot \cos\gamma\,. \end{cases}$$

Die Werte der drei Kosinusse lassen sich aber wiederum durch die Koordinaten der beiden Massen ausdrücken. Denn es ist, wie man auf Grund einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung sofort erkennt,

$$(13) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x-a}{r}\,, \\ \cos\beta = \dfrac{y-b}{r}\,, \\ \cos\gamma = \dfrac{z-c}{r}\,. \end{cases}$$

Andererseits ist nach einem bekannten elementaren Satze

$$(14) \qquad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Differentiieren wir diese Gleichung der Reihe nach partiell nach x, y und z, so finden wir

$$(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x-a}{r}\,, \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y-b}{r}\,, \\ \dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z-c}{r}\,. \end{cases}$$

Ein Vergleich dieser Gleichungen mit den Gleichungen (12) und (13) ergibt nun die wichtigen Beziehungen

[1] Sur l'équation séculaire de la lune; Hist. de l'acad. royale de Berlin, 1773; Oeuvres de Lagrange, t. VII.

$$(16) \qquad \begin{cases} X = K \cdot \dfrac{\partial r}{\partial x}, \\ Y = K \cdot \dfrac{\partial r}{\partial y}, \\ Z = K \cdot \dfrac{\partial r}{\partial z} \end{cases}$$

— Gleichungen, welche also immer gelten werden, wenn die Kraft in der Richtung von r wirkt, d. h. wenn wir es mit sogenannten Zentralkräften zu tun haben.

Lagrange erkannte aber auch sogleich, daß diese Gleichungen (16) zu einem besonders einfachen und schönen Resultate führen, wenn die Kraft K das Newtonsche Attraktionsgesetz befolgt. Denn dann ist K proportional $\frac{1}{r^2}$, somit X proportional $\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$. Nun ist aber

$$(17) \qquad \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Ist also die Kraft dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional, dann muß sich eine Funktion von besonders einfacher Form angeben lassen, die der ersten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist und deren negative Differentialquotienten nach den Koordinaten gleich den Komponenten der Kraft sind. Handelt es sich um die Anziehung zweier Massen m und m', so hat diese Funktion die Gestalt $\frac{m \cdot m'}{r}$ (denn die Kraft rechnet man negativ, wenn sie die Entfernung r zu verringern trachtet).

Da der Differentialquotient einer Summe von Funktionen gleich ist der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Funktionen, so kann Lagrange auch eine sehr einfache Beziehung für den Fall angeben, daß ein Körper nicht nur von einem zweiten, sondern gleichzeitig von mehreren (insgesamt s) Körpern angezogen wird. Dann wird die gesamte Anziehungskraft, die der betrachtete Körper erfährt, proportional sein $\sum_{i=1}^{i=s} \frac{1}{r_i^2}$; aus der Gleichung (17) folgt aber dann, daß wir einfach eine Größe zu bilden haben $\sum_{i=1}^{i=s} \frac{1}{r_i}$ und daß eine Funktion, die dieser Summe proportional ist, die Eigenschaft haben muß, durch partielle Differentiation nach den Koordinaten die drei Komponenten der gesamten Kraft zu ergeben, mit der der betrachtete Körper von allen anderen angezogen wird.

Diese Ideen hat Lagrange in einer zweiten Abhandlung weiter ausgestaltet, die 1777 in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie unter dem Titel erschien: „Allgemeine Bemerkungen über die Bewegung von mehreren Körpern, die sich gegenseitig im umgekehrt quadratischen

Verhältnisse ihrer Entfernung anziehen".[1] In dieser Abhandlung zeigte Lagrange, daß man die Untersuchung des Problems wesentlich vereinfachen könne, wenn man in die Betrachtungen eine Größe Ω einführe, die gleich ist

$$\Omega = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=n}{}' \frac{m_h \cdot m_k}{r_{hk}}, \tag{18}$$

wobei die erste Summe über alle h von 1 bis n, die zweite über alle k von 1 bis n mit Ausschluß von h zu erstrecken ist. Da nämlich

$$r_{hk} = \sqrt{(x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2} \tag{19}$$

ist, so erkennt man leicht, daß die gesamte Kraft, die auf den Punkt mit der Nummer h in der x-Richtung wirkt, gleich sein muß

$$X_h = \frac{\partial \Omega}{\partial x_h}. \tag{20}$$

Da Analoges auch für alle übrigen Punkte gilt, so kann man also, wenn Ω in seiner Abhängigkeit von den $3n$ Koordinaten des Systems gegeben ist, ohne weiteres die Bewegungsgleichungen des ganzen Systems anschreiben. Sie lauten

$$\left\{\begin{aligned} m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x_h}, \\ m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y_h}, \\ m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z_h} \\ (h &= 1, 2, 3 \ldots n). \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Diese wichtigen Bemerkungen von Lagrange sind zunächst ganz unbeachtet geblieben und erst von Laplace[2], der aber Lagranges Priorität nicht ausdrücklich erwähnte, gewürdigt und verwertet worden. (So kam es, daß in vielen Lehrbüchern die Begründung der Potentialtheorie nicht auf Lagrange, sondern auf Laplace zurückgeführt wird.) Laplace war es auch, der für die Größe, als deren negative Differentialquotienten die Kraftkomponenten erscheinen, die heute übliche Bezeichnung V einführte; er hat aber auch die Entwicklung der Potentialtheorie sehr dadurch gefördert, daß er eine sehr wichtige Eigenschaft der Größe V entdeckte, durch die die Behandlung vieler Probleme eine ganz außerordentliche Vereinfachung erfährt.

---

[1] Remarques générales sur les mouvements de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances; Histoire de l'académie royale de Berlin, 1777, p. 155; Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 401—420.

[2] Théorie du mouvement des planètes; Mém. de l'acad. des sciences de Paris, 1784; auch Mécanique céleste, I, part. I, livre II, chap. 2.

Laplace zeigte nämlich, daß, wenn man mit β die Größe $\frac{1}{r}$ bezeichnet, die Summe der zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Funktion nach den drei Koordinaten immer verschwinden muß, daß also stets die Gleichung erfüllt sein muß

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = 0; \tag{22}$$

wofür man auch in symbolischer Abkürzung schreibt

$$\Delta \beta = 0$$

(Δ nennt man dabei den Laplaceschen Operator). Denn es ist ja

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x-a}{r} = -\frac{x-a}{r^3};$$

somit

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}.$$

Bildet man zwei analoge Ausdrücke für $\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}$ und addiert dann alle drei, so findet man ohne weiteres

$$\Delta \beta = 0.$$

Da aber V immer β proportional ist, so muß auch stets die Beziehung erfüllt sein

$$\Delta V = 0. \tag{23}$$

Diese Differentialgleichung, die man kurz die Laplacesche Gleichung nennt und deren Gültigkeit später von Poisson auf solche Raumstellen eingeschränkt wurde, in denen sich keine Massen befinden[1], enthält nicht nur ein mathematisch sehr interessantes Resultat; sie ermöglicht auch eine wesentliche Vereinfachung vieler Probleme der Attraktionstheorie. Wir können sie ja auch in der Form schreiben

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.^2 \tag{24}$$

Liegt also z. B. ein planimetrisches Problem vor, bei dem $Z = 0$ ist, so können wir, wenn wir wissen, wie sich in der Richtung der x-Achse die

[1] An Stellen des Raumes, in denen die Massendichte ϱ von Null verschieden ist, wird, wie zuerst Poisson zeigte,

$$\Delta V = -4\pi\varrho.$$

Man bezeichnet diese Gleichung, die die Gleichung (23) als Spezialfall enthält, als die Laplace-Poissonsche Gleichung.

[2] In der Vektoranalysis bezeichnet man den auf der linken Seite stehenden Ausdruck als die Divergenz des Vektors, dessen Komponenten X, Y, Z sind. Bezeichnet man also die Kraft mit $\mathfrak{P}$, so gilt für sie, falls sie ein Potential besitzt, die Vektorgleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{P} = 0.$$

Komponente X ändert, sofort auch angeben, wie in der y-Richtung die Komponente Y variiert.

Wenn nun bei den zu untersuchenden Problemen tatsächlich eine Funktion existiert, als deren partielle Ableitungen sich die Kraftkomponenten darstellen lassen, dann erkennt man leicht, daß in diesem Falle $(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)$ ein vollständiges Differential ist, und zwar eben das Differential der betreffenden Funktion. Denn wenn

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

ist usw., so ist

$$(25) \quad X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot dz.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist aber nach einem bekannten Lehrsatze der Differentialrechnung nichts anderes als das totale Differential von Φ, da ja eben Φ nur eine Funktion der Koordinaten ist. (Man erkennt natürlich auch ohne weiteres, daß, falls eine Funktion Φ existiert, die Bedingungen von Clairault erfüllt sind, da natürlich

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}$$

ist usw.)

Da aber

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

ist, so ist natürlich

$$d\Phi = -dV.$$

Die von Euler aufgestellte Gleichung (7) verwandelt sich also, wie Lagrange erkannte, falls ein „Potential" existiert — wie man mit einem von Green[1] geschaffenen Ausdrucke die Funktion V nennt — in die einfache Form

$$(26) \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) + dV = 0.$$

Diese Gleichung gilt aber nun nicht nur für einzelne Massenpunkte, sondern auch mutatis mutandis für ein System von beliebig vielen Massenpunkten, die in beliebiger Weise aufeinander wirken, wofern eben nur die Summe der virtuellen Momente aller an dem System angreifenden Kräfte (sowohl der äußeren als auch der inneren) ein vollständiges Differential ist, das wir in diesem Falle dV nennen wollen. In diesem Falle führt die Integration der $3n$ Bewegungsgleichungen des Systems zu dem einfachen ersten Integrale

$$(27) \quad \sum \frac{mv^2}{2} + V = H,$$

[1] An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism (Nottingham 1828; deutsch in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 61).

wobei wir eben dann unter V das Potential des ganzen Systems zu verstehen haben und H eine von der Zeit unabhängige Konstante bedeutet.[1]

Die „dritte Integrationsmethode" liefert also nicht wie die beiden anderen (die wir in Vorl. 11 und 12 kennen lernten) auch wiederum drei, sondern nur ein einziges erstes Integral. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Satze der Erhaltung der lebendigen Kraft einerseits und den Prinzipien des Schwerpunktes und der Flächen andererseits besteht auch darin, daß aus den Endformeln, die die Integrationsmethoden des Schwerpunkts- und des Flächensatzes liefern, die inneren Kräfte völlig verschwinden, während sie in der Gleichung (26) in dem Ausdrucke für V mit enthalten sind.

Die Formel (27) stellt einen exakten Ausdruck für das erweiterte Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft dar, das in einer Fassung, die ihm zuerst Leibniz[2] gab, lehrte, daß, wenn auch zwar die aktuelle lebendige Kraft eines Systems Änderungen erfahre, dennoch die Summe aus der aktuellen lebendigen Kraft und aus der latenten aufgespeicherten Kraft oder dem Wirkungsvermögen oder der potentia (wie sie Leibniz nannte) stets eine unveränderliche Größe darstellen müsse; seine weitere und präzisere Ausgestaltung hat dieses Gesetz namentlich durch eine Reihe französischer Techniker (Lazare Carnot, Coriolis, Poncelet)[3] erfahren, die erkannten, daß die latente Kraft identisch ist mit der Arbeitsmenge, die bei einer Verminderung der aktuellen lebendigen Kraft geleistet wurde, die aber immer wieder (falls man von der Reibung absieht) die verschwundene lebendige Kraft von neuem zu erzeugen vermag.

Man kann also, wie zuerst in seiner berühmten, 1847 erschienenen Abhandlung „Über die Erhaltung der Kraft" Herrmann Helmholtz (damals zunächst freilich noch etwas ungenau) zeigte, falls die Kräfte Zentralkräfte sind und somit ein Potential besitzen, das Potential — oder die „Summe der Spannkräfte", wie Helmholtz sagte — mit der potentiellen Energie[4] identifizieren; die Konstante H der Gleichung (27) bedeutet also nichts anderes als die gesamte mechanische Energie des Systems, die eben, wenn auch die Werte ihres aktuellen und ihres potentiellen Teiles für sich einzeln variabel sind, dennoch in ihrem Gesamtbetrage eine unveränderliche und für das betrachtete System charakteristische Größe darstellt.

---

[1] Lagrange, Mécanique analytique (2. éd.), part. II, sect. 3, § 5.

[2] Leibniz, Dynamica, pars. II, sect. I, p. 435 (ed. Gerhardt, Halle 1860).

[3] Vgl. A. E. Haas, Die Entwicklungsgeschichte des Satzes von der Erhaltung der Kraft (Wien 1909), Kap. VIII.

[4] Eine allgemeine Verbreitung fand das Wort „Energie" in seinem heutigen Sinne erst seit dem Erscheinen der Abhandlung von Rankine, „On the general law of the transformation of energy" (Philos. Magaz. (4) **5**, 1853, p. 106—117).

Fünfzehnte Vorlesung.

Das Problem der unfreien Bewegung.

In unseren bisherigen dynamischen Betrachtungen haben wir (wenn wir von der Huygensschen Theorie des physischen Pendels absehen) solche einzelne oder zu Systemen angeordnete materielle Punkte behandelt, die zwar dem Einflusse bestimmter Kräfte unterliegen, deren Bewegungsfreiheit jedoch von vorneherein keinerlei Beschränkungen unterliegt. Es ist nun aber auch möglich, daß die Bewegungsfreiheit eines materiellen Punktes von vorneherein eingeschränkt ist, so daß er im kräftefreien Zustande sich nicht so bewegen kann, wie er es auf Grund seines Beharrungsvermögens tun sollte und ebenso, falls Kräfte auf ihn wirken, auch nicht dieselbe Bahn beschreiben kann, wie er sie bei dem Fehlen dieser Beschränkungen zurücklegen würde.

Man bezeichnet solche Bewegungen, bei denen der von dem Körper beschriebene Weg nur von seinem Beharrungsvermögen und den auf ihn einwirkenden Kräften abhängt, als freie Bewegungen; hingegen bezeichnet man als unfrei solche Bewegungen, bei denen sich der Körper anders bewegt, als er sich nur unter dem Einflusse seines Beharrungsvermögens und der auf ihn wirkenden Kräfte bewegen würde.[1]

Die einfachste Art einer unfreien Bewegung ist eine solche, bei der eine bestimmte Bahn dem Körper von vorneherein vorgeschrieben ist, so daß diese der Körper überhaupt nicht verlassen kann. Man kann sich eine solche unfreie Bewegung etwa dadurch realisiert denken, daß man sich den Körper, auf den im übrigen beliebige Kräfte wirken mögen, in einen dünnen Kanal eingeschlossen denkt.[2] Weniger beschränkt ist eine Bewegung, bei der der Körper nur gezwungen ist, auf einer bestimmten Oberfläche zu bleiben. Während man also bei vorgeschriebener Bahn die Bewegung vollständig kennt, wenn der absolute Betrag der Geschwindigkeit an jeder Stelle der Bahn bekannt

---

[1] Euler definiert die unfreie Bewegung folgendermaßen (Mechanica sive motus scientia analytice exposita, pars II, § 1): Corpus non libere moveri dicitur, quando externa obstacula impediunt, quominus iuxta eam directionem progrediatur, iuxta quam cum ratione motus insiti tum ratione potentiarum sollicitantium moveri deberet.

[2] Eine andere Methode, durch die man es erreicht, daß sich ein Körper in einer gegebenen Kurve bewegt, besteht darin, daß man den Körper an einem Faden schwingen läßt, der sich von der Evolute der betreffenden Kurve abwickelt, wie etwa bei dem Huygensschen Zykloidalpendel (Euler, Mechanica, pars II, praefatio).

ist, so wird man bei der Bewegung auf einer gegebenen Fläche sowohl die Bahn des Körpers in der Fläche als auch seine Geschwindigkeit in dieser Bahn bestimmen müssen.

Der charakteristische Unterschied zwischen einer unfreien und einer freien Bewegung besteht nun darin, daß bei der freien Bewegung die von dem Körper beschriebene Bahn keinen Druck seitens des Körpers erleidet; daß hingegen bei der unfreien Bewegung der Körper infolge seines Beharrungsvermögens gegen seine Bahn drückt und natürlich nach dem dritten Newtonschen Axiome auch wieder umgekehrt gleich stark von seiner Bahn gedrückt wird. Gibt man also einem dünnen Kanale genau die Form des Weges, den unter dem Einflusse bestimmter Kräfte ein Körper in freiem Zustande beschreibt, so wird, wenn man durch diesen Kanal dann den Körper hindurchgehen läßt, die Wand des Kanales keinerlei Druck erfahren.

Denken wir uns z. B., daß eine kleine Kugel reibungslos in einer glatten Rinne laufe, die in einen horizontalen Tisch eingegraben sei; die Rinne münde in ein parabelförmig gekrümmtes, geschlossenes Rohr mit kreisförmigem Querschnitte. Die Parabel habe nun einen derartigen Parameter, daß sie dieselbe Gestalt habe, wie die Bahn eines mit der Anfangsgeschwindigkeit v geworfenen Körpers. Dann ist es klar, daß die Kugel, falls sie auf dem Tische mit der konstanten Geschwindigkeit v läuft, durch die parabolische Röhre frei hindurchgehen wird, ohne irgend einen Druck auf die Röhrenwände auszuüben oder von diesen zu erfahren.[1] Ist hingegen die Horizontalgeschwindigkeit der Kugel größer als v, so übt die Kugel gegen die Röhre einen nach oben gerichteten Druck aus; ist die Horizontalgeschwindigkeit der Kugel kleiner als v, so muß sie gegen die untere Röhrenwand drücken.

Zur vollständigen Lösung des Problems der unfreien Bewegung gehört also auch die Bestimmung der Größe und der Richtung des Druckes, den der unfrei bewegte Körper an jeder Stelle der Bahn gegen diese ausübt, und der, falls die Bahn keine genügende Festigkeit besitzt, zur Folge haben wird, daß der Körper aus ihr einfach hinausbricht.

— — Das Studium der unfreien Bewegungen ist eigentlich ebenso alt wie die exakte Behandlung der freien Bewegung. Denn schon Galilei hat zugleich mit den Gesetzen des freien Falles auch die der Abwärtsbewegung auf vorgeschriebenen Bahnen erforscht. Die Bewegung auf der schiefen Ebene (auf die er die komplizierteren Bewegungen zurückführte) behandelte Galilei, wie wir sahen[2], als eine Fallbewegung, bei der lediglich die Beschleunigung des freien Falles in dem Verhältnisse der Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge verkleinert erscheint.

---

[1] In Ausnahmefällen kann also auch die Bewegung in vorgeschriebener Bahn dennoch frei sein.

[2] Vorlesung 5.

In einem Scholium[1] (das allerdings in der ersten Ausgabe der „Discorsi" noch fehlte) hat Galilei auch ganz richtig das Problem der Bewegung auf der schiefen Ebene auf das Problem des Gleichgewichtes auf ihr zurückzuführen gesucht. Seine Überlegung läuft — wenn auch Galilei andere Worte gebraucht — dennoch im wesentlichen darauf hinaus, daß man bei der Bewegung auf der schiefen Ebene die vertikal auf den Körper wirkende Schwerkraft $\mathfrak{P}$ (Fig. 37) in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen könne, deren eine ($\mathfrak{Q}$) der Länge der schiefen Ebene parallel, während die andere ($\mathfrak{R}$) zu ihr normal sei. Da aber nun die Komponente $\mathfrak{R}$ auf der vorgeschriebenen Richtung der Bewegung senkrecht steht und diese infolgedessen in keiner Weise zu beeinflussen vermag, so muß offenbar die Bewegung auf der schiefen Ebene so erfolgen, als ob statt der ganzen Schwerkraft $\mathfrak{P}$ nur die Komponente $\mathfrak{Q}$ wirksam wäre.

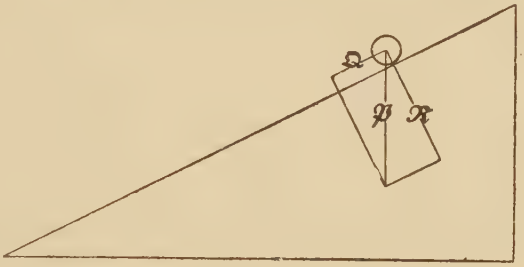

Fig. 37.

Die Komponente $\mathfrak{R}$ bleibt für die Bewegung ganz unwirksam; sie äußert sich nur in einem gegen die schiefe Ebene ausgeübten Drucke, dem nach dem Prinzipe der Gleichheit von Aktion und Reaktion natürlich ein ebenso großer Gegendruck seitens der schiefen Ebene entsprechen muß. Anstatt nun zu behaupten, daß für die Bewegung nur die eine Komponente der Kraft $\mathfrak{P}$ wirksam sei, kann man auch sagen, daß die Bewegung so erfolge, als ob auf den Körper zwar die ganze Kraft $\mathfrak{P}$ wirkte, überdies aber noch als „Zusatzkraft" der Gegendruck der schiefen Ebene, der eben der Komponente $\mathfrak{R}$ gleich und entgegengesetzt ist.[2]

Beide Auffassungen sind äquivalent, und in der Tat finden wir auch beide bereits ziemlich früh nebeneinander vertreten. Stevin z. B. behandelte, wie wir schon sahen[3], den Fall, daß auf einen auf einer schiefen Ebene befindlichen Körper überdies ein beliebig gerichteter Zug wirkt, so, als ob in dem Körper drei verschiedene Kräfte angreifen würden: der betreffende Zug, die vertikal nach abwärts gerichtete Schwerkraft und überdies eine von der schiefen Ebene ausgehende und zu ihr senkrechte, schräg nach aufwärts gerichtete Reaktionskraft (vgl. Fig. 10).

[1] Discorsi, 3. Tag, Theor. II, prop. II, Scholium.

[2] Denn in der Tat folgt aus den Grundsätzen der geometrischen Addition, daß, wenn $\mathfrak{P}$ die Resultierende aus $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ ist, man auch wiederum $\mathfrak{Q}$ als Resultierende aus zwei Kräften $\mathfrak{P}$ und $(-\mathfrak{R})$ auffassen kann.

[3] Vorlesung 2.

Nachdem nun Galilei sich bereits einer richtigen Grundidee zur Untersuchung der geradlinigen unfreien Bewegung bedient hatte, hat dann Christiaan Huygens das fundamentale Prinzip entdeckt, das der ganzen Behandlung krummliniger unfreier Bewegungen zugrunde liegt. Huygens hat nämlich erkannt, daß jeder Körper, dem aus irgendwelcher Ursache eine andere als eine geradlinige Bahn aufgezwungen wird, infolge seines Beharrungsvermögens einen senkrecht zur Bahn gerichteten Druck oder Zug ausüben muß; und für den einfachen Fall einer Kreisbewegung, die ohne Einwirkung einer äußeren Kraft gleichförmig erfolgt, hat auch Huygens auf Grund einer ziemlich einfachen Überlegung, die wir bereits kennen lernten[1], ganz richtig die Größe der Zentrifugalkraft ermittelt. Er hat gefunden, daß jeder Körper, der sich gleichförmig in einem Kreise bewegt, in zentrifugaler Richtung einen Zug oder Druck ausübt, der gleich ist $\frac{mv^2}{r}$, wenn wir unter v die konstante Geschwindigkeit der kreisförmigen Bewegung verstehen.

Das Prinzip, daß bei der geradlinigen, unfreien Bewegung nur die in die Bahnrichtung fallende Komponente der angreifenden Kraft zur Geltung komme und Huygens' Prinzip der Zentrifugalkraft brauchen aber nun in der Tat bloß kombiniert zu werden, um eine ganz allgemeine Lösung des Problems der unfreien Bewegung zu liefern. Eine solche allgemeine Lösung ist zuerst Leonhard Euler gelungen, der überhaupt in dem zweiten Teile seiner 1736 erschienenen „Mechanica" zuerst eine ausführliche Theorie der unfreien Bewegung entwickelte.

Euler betrachtet, bevor er zu dem eigentlichen allgemeinen Probleme übergeht, zunächst als besonders einfachen Spezialfall eine kräftefreie Bewegung, die in einer beliebigen vorgeschriebenen Kurve erfolge. Da kann nun Euler vor allem zeigen, daß eine derartige (reibungslose) Bewegung stets gleichförmig sein muß, so daß also der absolute Betrag der Geschwindigkeit bei einer solchen Bewegung keine Veränderungen erfährt.[2]

Um uns von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, betrachten wir mit Euler eine Kurve, bei der das Kurvenelement MN (Fig. 38) mit der Geschwindigkeit v in der Zeit dt zurückgelegt werde. Es ist also nach der Definition der Momentangeschwindigkeit[3] die Größe v definiert durch den Quotienten $\frac{\overline{MN}}{dt}$, wobei wir für das Kurvenstück

[1] Vorlesung 7.

[2] Euler, Mechanica, pars II, § 12. Euler betrachtet auch — worauf hier nicht eingegangen werden soll — den besonderen Fall, daß der Krümmungshalbmesser an einer Stelle der Bahn Null wäre. Er gelangt dann zu dem Schlusse, daß, wenn der sich bewegende Körper elastisch ist, er sich auf jeder Kurve gleichförmig bewegen werde; falls er hingegen unelastisch ist, werden nur die Spitzen seine Bewegung stören, nämlich sie gänzlich aufheben.

[3] Vorlesung 7.

MN seine Sehne setzen können. Nach Ablauf eines gleich großen Zeitintervalles dt befinde sich der bewegte Massenpunkt in der Kurve in dem Punkte P, während er sich frei und bloß unter dem Einflusse seines Beharrungsvermögens in der gleichen Zeit nach P' in der Richtung der Tangente des Punktes N bewegt hätte.

Wenn aber nun für verschwindend kleines dt das Kurvenelement NP durch seine Sehne ersetzt werden kann und für verschwindend kleines dt auch kein Richtungsunterschied mehr zwischen den Sehnen MN und NP besteht, so muß also auch (bis auf einen Unterschied, der unendlich klein ist von der zweiten Ordnung)

$$NP' = NP$$

sein. Da aber nun $\frac{NP'}{dt}$ gleich ist der Geschwindigkeit, mit der das Kurvenstück MN durchlaufen wurde, und $\frac{NP}{dt}$ gleich ist der Geschwindigkeit, mit der das Kurvenstück NP zurückgelegt wird, so kann auch der Unterschied in den Geschwindigkeiten, mit denen zwei benachbarte Kurvenelemente zurückgelegt werden, nur unendlich klein von der zweiten Ordnung sein. Es kann also infolgedessen auch in endlichen Zeiten der absolute Betrag der Geschwindigkeit keine endliche Änderung erfahren.

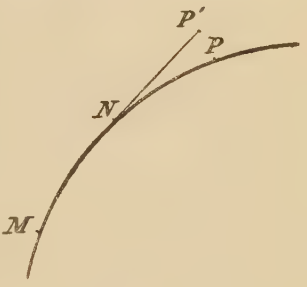

Fig. 38.

Was nun die Frage des Druckes betrifft, den der in dem Kanale bewegte Körper gegen seine Wand ausübt, so kann Euler diese Frage ohne weiteres auf Grund des schon in einer früheren Vorlesung[1] erwähnten Satzes der Differentialgeometrie beantworten, demzufolge man ein verschwindend kleines Stück einer Kurve (das drei benachbarte Punkte enthält) immer durch einen Kreisbogen ersetzen kann, dessen Mittelpunkt in der Hauptnormalen liegt.

Bezeichnen wir also den Wert des Krümmungshalbmessers an der betreffenden Stelle der Bahn mit ϱ, so ist der Druck, den der bewegte Körper gegen die Kanalwand ausübt, seinem absoluten Betrage nach gleich $\frac{m v^2}{\varrho}$, und zwar hat er stets die entgegengesetzte Richtung wie der Krümmungsradius, der immer in der Richtung zu dem Krümmungsmittelpunkte positiv gerechnet wird.[2] Der Gegendruck, den auf den bewegten Körper die Kanalwand ausübt, hat also stets die Richtung der Hauptnormalen und somit den Wert $+\frac{m v^2}{\varrho}$.

---

[1] Vorlesung 7.

[2] Euler, Mechanica, pars II, § 20.

Nachdem wir derart mit Euler den einfachen Fall betrachtet haben, in dem die Bewegung im Kanale kräftefrei erfolgt, gehen wir nunmehr zu dem allgemeinen Probleme über, indem wir uns auf den bewegten Körper eine Kraft wirkend denken; doch wollen wir auch hier wieder zunächst zwei besonders einfache Spezialfälle ins Auge fassen.

Wir betrachten nämlich zunächst mit Euler den einfachen Fall, daß an der betreffenden Stelle des Kanals, an der wir das Verhalten des Massenpunktes studieren, die Kraft (die wir in diesem Falle $\mathfrak{N}$ nennen wollen) auf der Kanalwand senkrecht stehe; und zwar sei sie nach dem Krümmungsmittelpunkt gerichtet. Dann ist es, da die Kraft zur vorgeschriebenen Richtung der Bewegung normal wirkt, klar, daß sie an dieser Stelle der Bahn die Bewegung in keiner Weise beeinflussen, daß sie sie weder vermehren noch vermindern kann. Die Wirkung der Kraft äußert sich lediglich in einem Drucke, den sie gegen die Wand des Kanals ausübt.[1]

Dieser gegen die Kanalwand von der angreifenden Kraft $\mathfrak{N}$ ausgeübte Druck wird sich mit dem von der Zentrifugalkraft herrührenden Drucke zu einer Resultierenden vereinigen lassen. Im allgemeinen wird natürlich der von der angreifenden Kraft herrührende Druck eine andere Richtung haben als die Zentrifugalkraft, die ja stets in die negative Richtung der Hauptnormalen fällt; aber jedenfalls muß auch der resultierende Druck wiederum auf der Kanalwand senkrecht stehen.

Betrachten wir den besonders einfachen Fall, in dem die Bewegung in einer einzigen Ebene stattfindet und auch die Richtung der Kraft in diese Ebene fällt, so wird der gesamte Druck, der von der konvexen Seite der Kurve weg gerichtet ist, gleich sein

$$\frac{m v^2}{\varrho} - N,$$

nämlich gleich der Differenz, weil ja die Zentrifugalkraft die entgegengesetzte Richtung hat wie der Krümmungshalbmesser, die Kraft $\mathfrak{N}$ aber in der Richtung des Krümmungshalbmessers positiv gerechnet wird.

Bewegt sich also z. B. ein Körper gleichmäßig mit der Geschwindigkeit v in einem kreisförmigen Kanale mit dem Radius r und wirkt zu dem Zentrum des Kreises eine Attraktionskraft von der Größe K, so wird der auf die Kanalwand ausgeübte Druck von dem Zentrum weg gerichtet sein, wenn

$$v > \sqrt{\frac{K \cdot r}{m}}.$$

Dagegen wird die innere Wand des Kanals von dem bewegten Körper gedrückt werden, wenn

$$v < \sqrt{\frac{K \cdot r}{m}},$$

[1] Euler, Mechanica, pars II, § 37.

und ist schließlich die Geschwindigkeit so groß, daß gerade

$$v = \sqrt{\frac{K \cdot r}{m}},$$

dann wird die Wand des Kanals überhaupt keinen Druck erfahren; der Körper wird also durch den Kanal in freier Bewegung hindurchgehen; die Bewegung wird sich in nichts von einer freien unterscheiden und sie würde ganz dieselbe bleiben, wenn sich etwa während der Bewegung der Kanal, in den der Körper bis dahin eingeschlossen war, verflüchtigte.

Bewegt sich also ein Körper frei in einem Kreise, so muß er gegen das Zentrum mit einer Kraft gezogen werden, die ebenso groß (aber entgegengesetzt) ist, wie die Zentrifugalkraft wäre, wenn die Bewegung in demselben Kreise ohne Einwirkung einer Kraft, aber unfrei erfolgt. Diese Auffassung begegnet uns bereits bei Newton, der eben offenbar auf Grund seines Prinzipes von der Gleichheit der Aktion und Reaktion aus den Huygensschen Sätzen über die Zentrifugalkraft bei der unfreien Bewegung seine Sätze über freie Bewegungen gewann, die unter dem Einflusse einer Zentripetalkraft erfolgen.

Aus dieser Auffassung geht aber zugleich hervor, daß man sich eine unfreie, kräftelose, kreisförmige Bewegung stets ersetzt denken kann durch eine freie Bewegung, bei der auf den Körper eine Zentripetalkraft wirkt, die der bei der unfreien Bewegung auftretenden Zentrifugalkraft gleich und entgegengesetzt ist. Eine unfreie und eine freie Bewegung sind also einander äquivalent und werden durch dieselben Bewegungsgleichungen beschrieben, wenn die freie Bewegung unter dem Einflusse einer Kraft erfolgt, die die Reaktionskraft zu dem Drucke darstellt, den bei der unfreien Bewegung der bewegte Körper gegen den Kanal ausübt.

Diesen Satz kann man ohne weiteres auch auf den Fall verallgemeinern, daß, wie wir sagten, auf einen in einem beliebigen Kanale eingeschlossenen Körper eine zu den Kanalwänden senkrechte Kraft $\mathfrak{N}$ wirke. Man kann dann die Tatsache, daß die Kraft $\mathfrak{N}$ auf die Bewegung im Kanale ohne jeden Einfluß bleibt, auch so deuten, daß sie durch eine gleich große, aber entgegengesetzte Reaktionskraft seitens der Kanalwände aufgehoben wird. Die gesamte Reaktionskraft wird also in diesem Falle entgegengesetzt gleich sein der Resultierenden aus der Kraft $\mathfrak{N}$ und aus der Zentrifugalkraft.

Nachdem wir derart mit Euler den besonderen Fall einer normal zur Kanalwand angreifenden Kraft untersucht haben, gehen wir nun zu der Betrachtung des zweiten einfachen Hauptfalles über, in dem eine Kraft, die wir in diesem Falle $\mathfrak{T}$ nennen wollen, an der betreffenden Stelle die Richtung der Bahntangente habe. Da in diesem Falle die Kraft in der Richtung wirkt, in der sich der Körper frei zwischen den Kanalwänden (und ihnen parallel) bewegen kann, so ist es klar, daß

die Kraft $\mathfrak{T}$ die Bewegung des Körpers in genau derselben Weise vermehren oder vermindern wird, wie wenn die Kanalwände überhaupt nicht vorhanden wären und sich der Massenpunkt ganz frei bewegte.[1] Es muß also, wenn die angreifende Kraft die Richtung der Bahntangente hat, auch bei der unfreien Bewegung dieselbe Proportionalität zwischen Kraft und Geschwindigkeitsänderung bestehen wie bei einer freien Bewegung.

Auf Grund der Erkenntnisse, zu denen die Betrachtung der beiden Spezialfälle der Kräfte $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{T}$ geführt haben, können wir aber nun mit Euler ohne weiteres das Problem der unfreien Bewegung für den allgemeinen Fall lösen, daß auf den in dem Kanale eingeschlossenen Körper eine ganz beliebig gerichtete Kraft $\mathfrak{P}$ wirke.

Denn Euler brauchte, um das allgemeine Problem auf die beiden schon gelösten Spezialprobleme zurückzuführen, nur die beliebig gerichtete Kraft $\mathfrak{P}$ in zwei zueinander senkrechte Komponenten zu spalten, deren eine ($\mathfrak{P}_t$) die Richtung der Bahntangente habe und deren andere ($\mathfrak{P}'$) auf der Tangente normal stehe.[2] Nach dem früher Gesagten ist es dann klar, daß sich der Körper, da die Komponente $\mathfrak{P}'$ ihn auf der vorgeschriebenen Bahn nicht zu bewegen vermag, so verhalten wird, als ob in ihm in jedem Augenblicke der Bewegung überhaupt nur die tangentiale Komponente der Kraft $\mathfrak{P}$ angriffe.

Die Gleichung für die Bewegung des materiellen Punktes in seiner vorgeschriebenen Bahn lautet also einfach

$$(1) \qquad P \cdot \cos(\mathfrak{P}, d\mathfrak{s}) = m \cdot \frac{dv}{dt};$$

und diese Gleichung reicht in der Tat, da die Richtung der Geschwindigkeit mit der Bahn schon gegeben ist, völlig aus, um die Bewegung des Körpers zu beschreiben. (Wäre die Bahn nicht völlig vorgeschrieben, sondern nur eine bestimmte Fläche, so wären natürlich zwei Bewegungsgleichungen erforderlich, während für eine ganz freie Bahn, wie wir sahen, stets drei Gleichungen zur Beschreibung der Bewegung notwendig sind.)

Das Problem der Bewegung des materiellen Punktes in seiner vorgeschriebenen Bahn ist also durch die Gleichung (1) gelöst. Ohne weiteres können wir aber auch nach Richtung und Größe den gesamten Druck angeben, den die Kanalwand erfährt. Dieser Druck, den wir $\mathfrak{N}'$ nennen wollen, wird gleich sein der Resultierenden aus der Kraftkomponente $\mathfrak{P}'$ (die senkrecht zur Bahn wirkt) und aus der Zentrifugalkraft. Wir werden, um die Richtung des Druckes festzulegen, diesen zweckmäßig ebenso wie die angreifende Kraft in drei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen, deren eine die Richtung der Bahn-

[1] Euler, Mechanica, pars II, § 42.

[2] Euler, Mechanica, pars II, § 45. Euler nimmt überdies an, daß sich der Körper in einem widerstehenden Mittel bewege, wovon aber hier abgesehen sei.

tangente, deren zweite die Richtung der Hauptnormalen und deren dritte die Richtung der Binormalen habe.[1] Wir wollen diese Komponenten mit $\mathfrak{P}_t$, $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{P}_b$ und $\mathfrak{R}_t'$, $\mathfrak{R}_n'$, $\mathfrak{R}_b'$ bezeichnen.

Dann erhalten wir also für die Komponenten des Druckes, wenn wir sie in den Richtungen der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen positiv rechnen, die Werte

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} R_t' = 0, \\ R_n' = P_n - \dfrac{m v^2}{\varrho}, \\ R_b' = P_b. \end{cases}$$

Die Komponenten der Reaktionskraft $\mathfrak{R}$ werden denen des Druckes $\mathfrak{R}'$ entgegengesetzt gleich sein.[2] Setzt man nun die angreifende Kraft $\mathfrak{P}$ und die Reaktionskraft $\mathfrak{R}$ zu einer resultierenden Kraft $\mathfrak{K}$ zusammen, so finden wir für deren Komponenten — unter Benutzung der Gleichung (1) — die Werte

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} K_t = m \dfrac{dv}{dt}, \\ K_n = \dfrac{m v^2}{\varrho}, \\ K_b = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen brauchen wir aber nun nur mit den Gleichungen zu vergleichen, die — nach Vorl. 7, Formel (11) — für die freie Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse der Kraft $\mathfrak{K}$ gelten, um zu erkennen, daß in der Tat die unfreie Bewegung, die in vorgeschriebener Bahn unter dem Einflusse der Kraft $\mathfrak{P}$ erfolgt, identisch ist mit einer freien Bewegung, die unter dem gemeinsamen Einflusse der angreifenden Kraft $\mathfrak{P}$ und der Reaktionskraft $\mathfrak{R}$ stattfindet.

[1] Vgl. Vorl. 7.

[2] Der Begriff der Reaktionskraft findet sich bei Euler noch nicht; die hierauf bezüglichen Betrachtungen wurden nur zum besseren Verständnisse der Eulerschen Ideen eingeschoben.

Sechzehnte Vorlesung.

Das Prinzip von d'Alembert.

In den letzten Vorlesungen haben wir zwei Arten mechanischer Vorgänge kennen gelernt, bei denen sich ein Massenpunkt anders verhält, als er es bloß unter dem Einflusse seines Beharrungsvermögens und der an ihm angreifenden Kräfte täte. Mit der einen Art solcher Bewegungen haben wir uns zuletzt befaßt; es handelte sich dabei um die Bewegung eines Massenpunktes, dessen Bahn insofern von vorneherein ganz oder teilweise vorgeschrieben ist, als er eine bestimmte Kurve oder eine bestimmte Fläche nicht verlassen kann. Die Bewegung, die ein Körper ausführt, der solchen Beschränkungen unterworfen ist, wird im allgemeinen verschieden sein von derjenigen, die er in freiem Zustande ausführen würde. Es wird z. B. auf einer schiefen Ebene (Fig. 39) ein Körper tatsächlich in einer bestimmten Zeit die blau gezeichnete Strecke zurücklegen, während er, wenn er sich frei im Raume bewegen könnte, in derselben Zeit die rot gezeichnete Strecke durchlaufen hätte (dabei müssen natürlich die rote und die blaue Strecke die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden). Es wird bei einer ohne äußere Kräfte erfolgenden gleichmäßigen Kreisbewegung (Fig. 40) ein Körper tatsächlich in einem bestimmten Zeitelemente den blau gezeichneten Bogen zurücklegen, während er in freiem Zustande infolge seines Beharrungsvermögens in der gleichen Zeit in der Richtung der Tangente die rot gezeichnete Strecke zurückgelegt hätte.

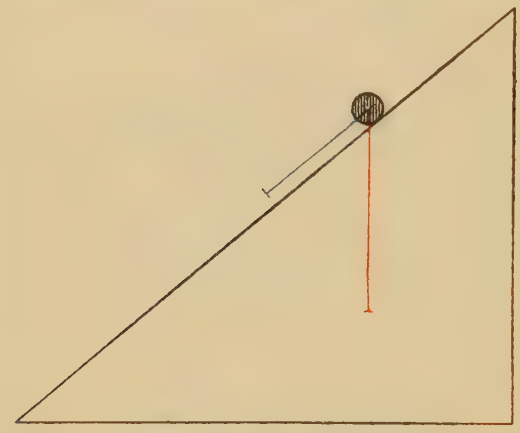

Fig. 39.

Der Bewegung in vorgeschriebener Kurve oder Fläche ist nun durchaus die andere Art von unfreien Bewegungen verwandt, die wir bereits

bei der Besprechung der Huygensschen Sätze über das physische Pendel kennen lernten. Denn ein Massenpunkt wird sich im allgemeinen auch dann anders als in freiem Zustande bewegen, wenn er mit einem oder mit mehreren anderen materiellen Punkten verbunden ist. In diesem Falle werden die Massenpunkte infolge ihrer Verbindungen ihre Bewegungen gegenseitig beeinflussen und verändern.

Fig. 40.

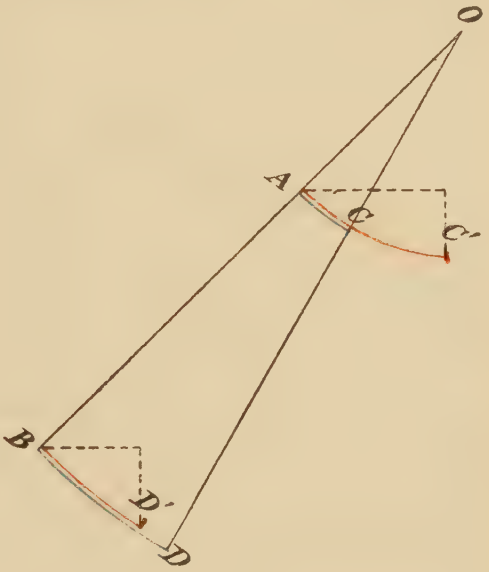

Fig. 41.

Betrachten wir als einfachsten Fall eines physischen Pendels eine gewichtslose, um den Punkt O drehbare Stange (Fig. 41), an der in den Punkten A und B zwei Massen angebracht seien, so werden wir auch hier wieder die Wege, die die Massenpunkte in einer bestimmten Zeit tatsächlich zurücklegen und die durch die blauen Bogen AC und BD dargestellt sind, von den rot gezeichneten Bogen AC' und BD' unterscheiden können, die die beiden Massen zurücklegen würden, wenn zwischen ihnen keine starren Verbindungen bestünden, sie also zwei voneinander unabhängige mathematische Pendel darstellten.

Der Einfluß der starren Verbindung äußert sich also darin, daß die eine Masse rascher, die andere hingegen langsamer schwingt, als sie es einzeln täten; die starre Verbindung bewirkt einen Ausgleich der Geschwindigkeiten, die die Massen einzeln annehmen würden; und wir brauchten nun nur das Gesetz zu kennen, nach dem dieser Ausgleich stattfindet, um zugleich die Möglichkeit zu besitzen, das Problem des physischen Pendels auf das des mathematischen und allgemein also das Problem der Bewegung starr verbundener Massenpunkte auf das

Problem der Bewegung eines einzelnen freien Massenpunktes zurückzuführen.

Um die Aufsuchung eines allgemeinen Prinzipes, das diese Zurückführung ermöglicht, haben sich, wie wir sahen, in der Tat schon früh die Physiker bemüht. Den ersten, sehr bedeutenden Versuch stellt in dieser Hinsicht der in einer früheren Vorlesung[1] schon ausführlich besprochene Satz dar, mittels dessen Huygens den Schwingungsmittelpunkt berechnete. Denn dieser Satz lehrt ja eigentlich nichts anderes, als daß man sich bezüglich aller für die gesamte lebendige Kraft[2] geltenden Beziehungen ein System von starr verbundenen Massenpunkten in jedem Augenblicke der Bewegung ersetzt denken kann durch ein System von freien Massenpunkten, die keinen inneren Kräften unterliegen, insofern sie in irgend einem Zeitpunkte gleiche Lage und Geschwindigkeit hatten wie die starr verbundenen Massenpunkte.

Da das Prinzip der lebendigen Kraft in seiner Anwendung auf freie Systeme immer eine Gleichung liefert, in der, falls die tatsächlich angreifenden Kräfte bekannt sind, als Unbekannte nur die absoluten Beträge der Geschwindigkeiten der einzelnen Massenpunkte vorkommen, so ist es klar, daß der Huygenssche Satz — ohne daß die Natur und die Wirkungen der Verbindungen und die Art des Ausgleiches der Geschwindigkeiten näher bekannt zu sein brauchen — dennoch in allen den Fällen zur Beschreibung der Bewegung des unfreien Systems ausreicht, in denen durch die Momentangeschwindigkeit eines einzigen Punktes bereits die Momentangeschwindigkeiten aller Massenpunkte bestimmt sind. (Dies ist eben bei dem physischen Pendel der Fall, da bei ihm in jedem Augenblicke alle Punkte die gleiche Winkelgeschwindigkeit besitzen müssen.)

So geistvoll nun auch der Huygenssche Satz war, so fruchtbar er sich auch bei der Lösung eines recht schwierigen dynamischen Problems erwies, die Zeitgenossen von Huygens konnten sich mit dem Satze nicht recht befreunden; er schien ihnen zu wenig sicher begründet, zu wenig plausibel und sie ahnten es ganz richtig, daß er nur eine etwas kompliziertere Fassung eines viel durchsichtigeren und viel umfassenderen Prinzipes darstellen müßte.

So versuchten es in der Tat eine Reihe von Physikern, die Huygenssche Ableitung des Schwingungsmittelpunktes durch eine andere plausiblere zu ersetzen, und unter all den mannigfachen Aufsätzen, die dieses Ziel verfolgten, sollten nun namentlich die eines Autors von großer Bedeutung für die weitere Entwicklung der Dynamik werden; es waren die Aufsätze, die in der Zeit von 1686 bis 1703 Jakob Bernoulli veröffentlichte.

Jakob Bernoulli ging dabei von der Tatsache aus, daß bei einem physischen Pendel, wie es durch Fig. 41 dargestellt ist, die obere Masse

[1] Vorlesung 13.

[2] Oder, was dasselbe ist, bezüglich der „Aufsteigekraft" des Schwerpunktes.

infolge ihrer starren Verbindung mit der anderen einen Geschwindigkeitsverlust erfährt, und er fragte sich nun, in welcher Beziehung dieser Geschwindigkeitsverlust wohl zu dem Geschwindigkeitsgewinne stehen möge, der infolge der starren Verbindung mit der oberen Masse wiederum der unteren Masse beschieden ist.[1]

Eine einfache Überlegung zeigt, daß man keinesfalls — wozu man vielleicht im ersten Augenblicke geneigt wäre — den Geschwindigkeitsverlust der oberen Masse und den Geschwindigkeitsgewinn der unteren Masse einfach einander gleichsetzen darf. Da kam nun Jakob Bernoulli auf den glücklichen Gedanken, das physische Pendel als einen um den Punkt C drehbaren einseitigen Hebel anzusehen; und so lag für ihn nun jedenfalls die Vermutung sehr nahe, daß vielleicht Geschwindigkeitsverlust und Geschwindigkeitsgewinn das archimedische Hebelgesetz befolgten; daß sie sich vielleicht umgekehrt verhalten wie die Entfernungen der Massen von dem Unterstützungspunkte. In der Tat erkannte Jakob Bernoulli, daß diese Annahme auf einen richtigen Weg zur Lösung des Problems des Schwingungsmittelpunktes führen müsse.

Die von Bernoulli gegebene Anregung veranlaßte nun auch den Marquis de l'Hôpital, sich eingehender mit diesen Fragen zu beschäftigen[2], und hierbei gelang es diesem, einen nicht unbedeutenden Fehler aufzudecken, der Jakob Bernoulli unterlaufen war. l'Hôpital wies nämlich mit Recht darauf hin, daß man statt der in endlichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten, wie sie Bernoulli betrachtet hatte, die in einem Zeitelemente eintretenden Geschwindigkeitsänderungen in das Auge fassen müsse.

Der Aufsatz des Marquis de l'Hôpital bewog nun auch Jakob Bernoulli, wiederum zu dem Probleme des Schwingungsmittelpunktes zurückzukehren, und in einer Abhandlung, die 1703 erschien[3], gab er dann in der Tat eine durchaus richtige und exakte Ableitung des Schwingungszentrums, indem er nunmehr statt der Geschwindigkeiten die gewonnenen und verlorenen Beschleunigungen in das Auge faßte und zu ihrem Studium sich die Bewegungen, die die Massenpunkte tatsächlich ausführen, aus zwei Bewegungen zusammengesetzt dachte: aus solchen, die sie unverbunden ausführen würden und aus solchen, die unter dem Einflusse von Zug- und Druckkräften zustande kommen müßten, die einander gegenseitig kompensieren; so daß man auf diese Zug- und Druckkräfte die Gesetze des Gleichgewichtes am Hebel anwenden kann.

[1] Acta eruditorum Lipsiensa, Juli 1686, p. 356; auch Opera (Genf 1744) Nr. 23. Ferner „Demonstratio centri oscillationis ex natura vectis", Act. erud. Lips. 1691, p. 317; Opera, Nr. 45.

[2] Journ. de Rotterdam 1690; auch Jacobi Bernoulli Opera, Nr. 43.

[3] Histoire de l'acad. des sciences de Paris, 1703, p. 78 und 273; Opera Nr. 98, 99, 100.

Diese von Jakob Bernoulli eigentlich nur angedeutete Idee hat dann ihre Ausgestaltung zu einem für die ganze Mechanik grundlegenden Prinzipe durch Jean le Rond d'Alembert erfahren, der den neuen so ungemein fruchtbaren Satz zuerst im Jahre 1743 in seinem „Traité de Dynamique" mitteilte.[1] Die Überlegung, durch die d'Alembert sein Prinzip begründete, läßt sich aber etwa folgendermaßen wiedergeben.

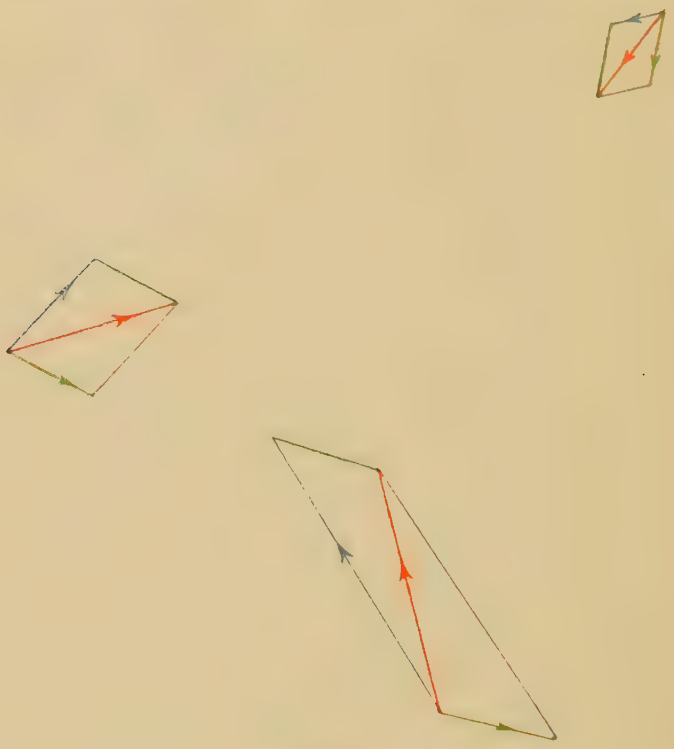

Fig. 42.

d'Alembert betrachtet mehrere Körper, die wir uns als materielle Punkte zu denken haben und die untereinander durch irgendwelche Verbindungen zusammenhängen, die ihre freie Beweglichkeit beeinträchtigen. An diesen Punkten mögen nun bestimmte Kräfte angreifen. Diese Kräfte würden den Körpern, wenn diese durchwegs frei wären, in einem bestimmten Zeitelemente bestimmte Bewegungen einprägen, die durch die rot gezeichneten Strecken dargestellt seien (Fig. 42, in der von den n Massenpunkten drei herausgegriffen seien). Da aber die einzelnen Körper nicht frei, sondern untereinander verbunden sind, so können sie die roten Bewegungen nicht ausführen; sie werden in

[1] Traité de dynamique, part. II, chap. I.

der Tat andere Bewegungen ausführen, die durch die blauen Strecken dargestellt seien.

Nach dem Satze vom Bewegungsparallelogramm kann man aber nun bei jedem der Körper die ihm eingeprägten roten Bewegungen, die er unter dem Einflusse der einwirkenden Kräfte ausführen würde, wenn er frei wäre, in zwei Komponenten zerlegen, deren eine eben die von ihm tatsächlich zurückgelegte blaue Bewegung ist; die andere Komponente wollen wir grün zeichnen.

Wenn nun aber die roten Bewegungen aus den blauen und grünen zusammengesetzt sind und die Körper, falls sie frei wären, die roten Bewegungen zurücklegen würden, infolge ihrer Verbindungen untereinander aber tatsächlich die blauen Bewegungen ausführen, dann müssen wir annehmen, daß eben durch die gegenseitigen Verbindungen der Körper die grünen Bewegungen aufgehoben und zerstört werden.

Man kann sich nun in ganz analoger Weise wie die Bewegungen auch die angreifenden Kräfte zerlegt denken. Man kann Kräfte fingieren, die an den Körpern, wenn sie frei wären, die blauen Bewegungen hervorrufen würden; wir wollen der Einfachheit halber diese fingierten Kräfte kurz die blauen Kräfte nennen. Man kann dann jede der angreifenden Kräfte (sie mögen die roten Kräfte heißen) in zwei Komponenten zerlegen, deren eine eben die entsprechende blaue Kraft ist. Es ist selbstverständlich, daß dann die anderen Komponenten, wenn sie für sich allein an den Körpern angriffen und diese frei wären, an ihnen die grünen Bewegungen hervorbringen müßten; wir wollen daher die zweiten Komponenten kurz als die grünen Kräfte bezeichnen.

Wir können also sagen: Wenn die Körper frei wären, kämen an ihnen die angreifenden (roten) Kräfte voll zur Geltung; wenn hingegen die Körper untereinander verbunden sind, kommen wohl die blauen Komponenten zur Geltung, genau so wie wenn die Punkte frei wären; dagegen bringen die grünen Komponenten überhaupt keine Bewegungen hervor. Das ist aber nur derart erklärlich, daß eben die grünen Komponenten aller der Kräfte, die an den verschiedenen Körpern angreifen, einander das Gleichgewicht halten und eben dadurch ihre Wirkungen gegenseitig zerstören; man bezeichnet deshalb mit einem sehr glücklich gewählten Ausdrucke auch die grünen Komponenten als die verlorenen Komponenten der angreifenden Kräfte.[1]

[1] Man erkennt z. B. ohne weiteres, daß in Fig. 39 die verlorene Komponente der angreifenden Kraft auf der schiefen Ebene senkrecht steht und gleich ist dem Gewichte, multipliziert mit dem Kosinus des Neigungswinkels der Ebene und daß in Fig. 40 die Zentrifugalkraft die verlorene Kraftkomponente darstellt. — Man kann sich auch umgekehrt die Kraft, die an der Masse die tatsächliche Bewegung hervor-

Wenn wir nun ein System von beliebig untereinander verbundenen materiellen Punkten betrachten, so können wir stets eine bestimmte Relation angeben, die im Gleichgewichtsfalle zwischen den an diesen Punkten angreifenden Kräften bestehen muß. Das d'Alembertsche Prinzip sagt nun nichts anderes aus, als daß ganz dieselbe Relation für den Fall, daß die Kräfte einander nicht das Gleichgewicht halten, sondern eine Bewegung hervorbringen, zwischen den verlorenen Komponenten der angreifenden Kräfte bestehen muß.

Betrachten wir z. B. einen ungleicharmigen starren, gewichtslosen Hebel, dessen rechter Arm dreimal so lang sei wie der linke; dann wissen wir, daß Gleichgewicht an diesem Hebel nur dann bestehen kann, wenn die im linken Endpunkte angreifende Kraft dreimal so groß ist wie diejenige, die im rechten Endpunkte angreift. Wenn nun an dem Hebel ganz beliebige Kräfte angreifen, die einander nicht das Gleichgewicht halten, sondern vielmehr den Hebel in Bewegung versetzen, so werden wir doch jedenfalls auf Grund des d'Alembertschen Prinzipes die Behauptung aufstellen können, daß die verlorene Komponente der linken Kraft in jedem Augenblicke dreimal so groß sein muß wie die verlorene Komponente der rechten Kraft.

Sobald wir aber nun durch das d'Alembertsche Prinzip für irgend ein System eine Beziehung zwischen den verlorenen Kräften gewonnen haben, so besitzen wir damit auch bereits eine Beziehung zwischen den angreifenden Kräften und den tatsächlichen Beschleunigungen, die ja eben von denjenigen verschieden sein werden, die die Massen in freiem Zustande annehmen würden.

Denn die blauen Kräfte müssen ja nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetze gleich sein den Produkten aus den Massen und aus den Beschleunigungen, die die Massen tatsächlich erfahren. Es muß also die blaue Komponente der Kraft, die an dem h-ten Massenpunkte angreift, gleich sein $m_h \cdot \mathfrak{b}_h$; denn eine ebenso große Kraft müßte ja an dem h-ten Massenpunkte, wenn er frei wäre, angreifen, um ihm die Beschleunigung $\mathfrak{b}_h$ zu erteilen, die er tatsächlich im unfreien Zustande erfährt.

Da aber nun die angreifenden roten Kräfte aus den blauen und aus den grünen Komponenten zusammengesetzt sind, so ist es ganz klar, daß die grüne Kraft, die an dem h-ten Massenpunkte verloren geht, gleich sein muß der geometrischen Differenz aus der angreifenden Kraft $\mathfrak{K}_h$ und aus dem Produkte $m_h \cdot \mathfrak{b}_h$. Sind uns also die Massen und die angreifenden Kräfte gegeben und sind uns die Gleichgewichts-

---

bringen würde, wenn sie frei wäre, zusammengesetzt denken aus der tatsächlich angreifenden Kraft und aus einer Reaktionskraft, die der verlorenen Komponente gleich und entgegengesetzt ist. Diese Auffassung haben wir schon in Vorl. 15 kennen gelernt.

bedingungen unseres Systems bekannt, so gewinnen wir durch das d'Alembertsche Prinzip soviel Relationen zwischen den Komponenten der angreifenden Kräfte und den Komponenten der tatsächlichen Beschleunigungen, als das System Gleichgewichtsbedingungen, als das System Freiheitsgrade hat. Besitzen wir aber derartige Relationen in einer solchen Anzahl, die wir s nennen wollen, so können wir (wie wir in der nächsten Vorlesung genauer sehen werden) für jede Masse ihre tatsächliche Beschleunigung angeben, denn es sind dann durch die s Komponenten der tatsächlichen Beschleunigungen sämtliche Komponenten infolge der gegebenen geometrischen Zusammenhänge bestimmt. Damit ist aber das Problem natürlich vollständig gelöst; denn das Problem der unfreien Bewegung eines Systems von untereinander verbundenen Massen erscheint dadurch zurückgeführt auf das Problem der freien Bewegungen von n einzelnen und voneinander unabhängigen Massen $m_1, m_2 \ldots m_n$, an denen unbehindert die voneinander ebenfalls unabhängigen Kräfte $m_1 \mathfrak{b}_1, m_2 \mathfrak{b}_2 \ldots m_n \mathfrak{b}_n$ angreifen und zur Geltung gelangen.

Wenn also auch die (oft wiederholte) Behauptung von Lagrange, daß durch das d'Alembertsche Prinzip die Dynamik auf die Statik zurückgeführt werde, zu Mißdeutungen Anlaß geben könnte, so kann man doch jedenfalls behaupten, daß man auf Grund des d'Alembertschen Prinzipes statische Kenntnisse dazu verwerten kann, um das komplizierte dynamische Problem der unfreien Bewegung verbundener Massen auf das einfache dynamische Problem der freien Bewegung zurückzuführen.

d'Alembert hat in seinem „Traité de dynamique" sein Prinzip bereits zur Lösung mannigfacher dynamischer Probleme verwertet und hierbei eben bei jeder besonderen Aufgabe aus den speziellen Gleichgewichtsbedingungen des Systems seine speziellen Bewegungsgesetze ermittelt. Einen allgemeineren Weg konnte d'Alembert nicht einschlagen, weil ihm eine allgemein brauchbare Gleichgewichtsformel fehlte.

Denn erst Lagrange hat in dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten das universelle Prinzip erkannt, aus dem man nach allgemeinen Methoden für jedes beliebige System die speziellen Gleichgewichtsbedingungen ableiten kann. In der statischen Grundformel, die eine universelle Relation zwischen den angreifenden Kräften, jedoch nur für den besonderen Fall angibt, daß die Kräfte einander das Gleichgewicht halten (sonst trifft diese Relation nicht zu) — in dieser seiner statischen Grundformel brauchte aber nun Lagrange nach dem d'Alembertschen Prinzipe nur die angreifenden Kräfte durch ihre verlorenen Komponenten zu ersetzen, um eine allgemein gültige dynamische Universalformel zu gewinnen, die unter Benutzung derselben Methoden, wie sie Lagrange für die Statik geschaffen hatte, zur Lösung aller Bewegungsprobleme ausreichen muß.

Bezeichnen wir die an einem Systeme angreifenden Kräfte mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ usw., so muß nach der statischen Grundformel im Falle des Gleichgewichtes die Summe der virtuellen Momente dieser Kräfte verschwinden; es muß also in dem besonderen Falle des Gleichgewichtes die Beziehung gelten[1]

$$P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + R \cdot \delta r + \ldots = 0. \tag{1}$$

Hierfür konnte Lagrange, wie wir sahen[2], auch unter Benutzung der Methoden der analytischen Geometrie schreiben

$$\sum_{h=1}^{h=n} (X_h \cdot \delta x_h + Y_h \cdot \delta y_h + Z_h \cdot \delta z_h) = 0, \tag{2}$$

wenn X_h, Y_h, Z_h die Komponenten der gesamten in dem h-ten Massenpunkte angreifenden Kraft sind, die wir $\mathfrak{K}_h$ nannten. [Die linken Seiten der Gleichungen (1) und (2) sind natürlich identisch.]

Aus der statischen Grundformel (2) muß sich aber nun die dynamische Universalformel ergeben, wenn überall die angreifenden Kräfte durch ihre verlorenen Komponenten ersetzt werden. Bezeichnen wir also die verlorene Komponente der in dem h-ten Massenpunkte angreifenden Kraft mit $\mathfrak{V}_h$ und die drei Komponenten von $\mathfrak{V}_h$ nach den Koordinatenachsen mit Ξ_h, H_h und Z_h, so muß dann stets die Beziehung erfüllt sein

$$\sum_{h=1}^{h=n} (\Xi_h \cdot \delta x_h + \mathsf{H}_h \cdot \delta y_h + \mathsf{Z}_h \cdot \delta z_h) = 0. \tag{3}$$

Da aber nun die verlorene Kraft $\mathfrak{V}_h$, wie wir schon sahen, gleich ist der geometrischen Differenz aus der angreifenden Kraft $\mathfrak{K}_h$ und aus dem Produkte $m_h \cdot \mathfrak{b}_h$, so können wir nun leicht die Komponenten der verlorenen Kräfte durch die Komponenten der tatsächlich angreifenden Kräfte und der tatsächlichen Beschleunigungen ausdrücken. Denn es muß ja sein[3]

$$\left\{ \begin{aligned} \Xi_h &= X_h - m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{d t^2}, \\ \mathsf{H}_h &= Y_h - m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{d t^2}, \\ \mathsf{Z}_h &= Z_h - m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{d t^2}. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Setzen wir nun die Werte für Ξ_h, H_h, und Z_h in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir mit Lagrange als Universalformel der Dynamik die Gleichung

---

[1] Vorles. 4, Gleichung (1).

[2] Vorles. 4, Gleichung (4).

[3] Da nach Vorles. 8, Gleichungen (5) eben

$$b_x = \frac{d^2 x}{d t^2}$$

ist.

$$(5)\qquad \left\{ \sum_{h=1}^{h=n} \left\{ \left(X_h - m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2} \right) \delta x_h + \left(Y_h - m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right) \delta y_h + \left(Z_h - m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{dt^2} \right) \delta z_h \right\} = 0. \right.$$

Da die linken Seiten der Gleichungen (1) und (2) identisch sind, so kann Lagrange[1] der dynamischen Universalformel auch leicht die andere, für manche Zwecke geeignetere Gestalt geben

$$(6)\qquad \left\{ \sum_{h=1}^{h=n} m_h \left(\frac{d^2 x_h}{dt^2} \cdot \delta x_h + \frac{d^2 y_h}{dt^2} \cdot \delta y_h + \frac{d^2 z_h}{dt^2} \cdot \delta z_h \right) = P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + R \cdot \delta r + \ldots \right.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht hierbei die gesamte Arbeit, die die angreifenden Kräfte bei einer virtuellen Verrückung des Systems leisten würden; diese Arbeit ist eben in dem allgemeinen Falle, in dem kein Gleichgewicht besteht, von Null verschieden, und zwar gleich der auf der linken Seite der Formel (6) stehenden Summe.[2]

---

[1] Mécanique analytique, part. II, sect. II, § 5.

[2] Man erkennt auch leicht, daß, wenn man statt der willkürlichen Veränderungen der Koordinaten ihre Änderungen in einem bestimmten Zeitelemente betrachtet — so daß man also das Zeichen δ durch das Zeichen d ersetzen kann —, daß dann die Gleichung (6) sich in den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft verwandelt. Die Äquivalenz zwischen der geleisteten Arbeit und dem Zuwachse an lebendiger Kraft ist aber, wie eben aus der Gleichung (6) hervorgeht, unabhängig von den Verbindungen, die zwischen den Massen des Systems bestehen. Das Prinzip von d'Alembert ist also im Wesen mit dem Huygensschen Theoreme (das wir in Vorles. 13 kennen lernten) identisch.

Siebzehnte Vorlesung.

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der ersten Form und die Methode der Multiplikatoren.

Wirken auf ein System von irgendwie untereinander verbundenen Massenpunkten ganz beliebige Kräfte, so gilt, wie wir sahen, doch stets nach Lagrange die universelle Beziehung

$$(1) \qquad \left\{ \sum \left\{ \left(X_h - m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2} \right) \delta x_h + \left(Y_h - m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right) \delta y_h + \left(Z_h - m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{dt^2} \right) \delta z_h \right\} = 0, \right.$$

wobei eben X_h, Y_h, Z_h die Komponenten der gesamten in dem h-ten Massenpunkte angreifenden Kraft sind. Auf Grund der Betrachtungen, die wir früher (Vorles. 4) an die statische Grundformel von Lagrange knüpften, können wir aber nun ohne weiteres die Frage beantworten, wie man aus der durch die Gleichung (1) dargestellten dynamischen Universalformel in jedem besonderen Falle die speziellen Bewegungsgleichungen des Systems ableiten kann, deren ja ebenso viele erforderlich sein werden, als das System Freiheitsgrade besitzt.

Wir erkennen zunächst, daß in dem besonderen Falle, in dem das System völlig frei ist und die Variationen der $3n$ Koordinaten daher voneinander völlig unabhängig sind, jeder der Klammerausdrücke für sich verschwinden muß; die Universalformel zerfällt also in diesem besonderen Falle in lauter Bewegungsgleichungen freier materieller Punkte.

Eine eigentliche Bedeutung gewinnt also die universelle Formel (1) erst dann, wenn das System nicht frei ist, sondern gewissen Bedingungen unterliegt; und diese Bedingungen müssen eben ihren analytischen Ausdruck in Gleichungen finden, die irgendwelche unter den $3n$ Koordinaten des Systems miteinander verknüpfen. Wir können diese Bedingungsgleichungen also ganz allgemein in der Form schreiben

$$(2)\qquad \begin{cases} L\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2 \ldots z_n) = \emptyset, \\ M\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2 \ldots z_n) = \emptyset, \\ N\,(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2 \ldots z_n) = \emptyset, \end{cases}$$

usw.[1]

Diese Bedingungsgleichungen, deren Gesamtzahl m sei, braucht man nun nur zu differentiieren, um von den $3n$ Variationen, die in der Universalformel (1) vorkommen, m Variationen eliminieren zu können. Indem man den Ausdruck, den man derart erhält, dann nach den Variationen der übriggebliebenen $3n-m$, voneinander also unabhängigen Koordinaten ordnet und die Klammerausdrücke, mit denen diese Variationen multipliziert erscheinen, einzeln Null setzt, gewinnt man aus der Universalformel $3n-m$ partikuläre Bewegungsgleichungen, also ebenso viele, als das System Freiheitsgrade besitzt und somit genügend viele, um die Bewegung des Systems vollständig beschreiben zu können.

In den meisten Fällen wird man jedoch rascher als nach dem angegebenen Verfahren durch eine andere, ungemein elegante Methode zum Ziele gelangen, die ihre Entstehung ebenfalls Lagrange[2] verdankt und die man gewöhnlich als die Methode der unbestimmten Multiplikatoren bezeichnet. Um für unser System, das den m Bedingungsgleichungen (2) unterliegt, aus der Universalformel die speziellen Bewegungsgleichungen zu gewinnen, verfahren wir nun nach der Methode der Multiplikatoren folgendermaßen.

Wir differentiieren die m Bedingungsgleichungen und erhalten derart in dem allgemeinsten Falle, wenn L, M, N usw. Funktionen sämtlicher $3n$ Koordinaten sind, Gleichungen von der Gestalt

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_h}\,\delta x_h + \frac{\partial L}{\partial y_h}\,\delta y_h + \frac{\partial L}{\partial z_h}\,\delta z_h \right) = \emptyset, \\ \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial M}{\partial x_h}\,\delta x_h + \frac{\partial M}{\partial y_h}\,\delta y_h + \frac{\partial M}{\partial z_h}\,\delta z_h \right) = \emptyset \end{cases}$$

usw., wofür wir auch kurz schreiben können

$$\delta L = \emptyset,$$
$$\delta M = \emptyset$$

usw.

Nach der Lagrangeschen Methode der Multiplikatoren haben wir nun jede der m Differentialgleichungen von der Gestalt (3) mit einem

[1] Beispiele für solche Bedingungsgleichungen s. S. 39. Wir wollen auch hier wieder von der Möglichkeit absehen, daß die Bedingungsgleichungen die Zeit explicite enthalten.

[2] Mécanique analytique, part. I, sect. IV, § 1.

Faktor zu multiplizieren, dessen Wert wir zunächst noch unbestimmt lassen — bei der ersten Gleichung sei der Faktor λ, bei der zweiten μ, bei der dritten ν usw. — und sodann haben wir die Gleichung (1) und alle die m mit den unbestimmten Faktoren multiplizierten Differentialgleichungen zu addieren. Wir erhalten derart eine Gleichung von der Form

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=n} \Big\{ &\Big(X_h - m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{d t^2} + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_h} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_h} + \ldots\Big) \delta x_h \\ &+ \Big(Y_h - m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{d t^2} + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_h} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_h} + \ldots\Big) \delta y_h \\ &+ \Big(Z_h - m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{d t^2} + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_h} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_h} + \ldots\Big) \delta z_h \Big\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung enthält also insgesamt $3n$ Klammerausdrücke, die mit den Variationen der $3n$ Koordinaten des Systems multipliziert erscheinen. Die Werte, die diese Klammerausdrücke besitzen, werden von den Werten der m Multiplikatoren abhängen, die wir bisher unbestimmt gelassen haben. Wir wollen nun ihre Werte — und in dieser Festsetzung liegt der eigentliche Kern der Methode der Multiplikatoren — derart wählen, daß von den $3n$ Klammerausdrücken m Null werden.

Es bleiben also dann von allen $3n$ Gliedern, die die Summe der Gleichung (4) bilden, nur $3n - m$ übrig, in denen bestimmte Klammerausdrücke mit den Variationen von $3n - m$ Koordinaten multipliziert sind. Da aber unser System eben auch $3n - m$ Freiheitsgrade hat, so können wir diese übriggebliebenen $3n - m$ Koordinaten als voneinander unabhängig variabel ansehen; wir können also bei diesen $3n - m$ Koordinaten jede einzeln variieren und dabei dennoch die übrigen ungeändert lassen. Auf diese Weise können wir — nach ganz demselben Verfahren, wie wir es schon in der vierten Vorlesung kennen gelernt haben — dann der Reihe nach für jeden der $3n - m$ Klammerausdrücke einzeln nachweisen, daß er Null sein muß.

Da aus der ursprünglichen Gleichung (4) aber schon von vorneherein m Klammerausdrücke infolge der Festsetzung verschwunden sind, die wir über die Werte der Multiplikatoren getroffen haben, so erhalten wir also die speziellen Bewegungsgleichungen für die Massenpunkte unseres Systems, indem wir einfach in der ursprünglichen Gleichung (4) alle $3n$ Klammerausdrücke einzeln Null setzen.

Die Gleichungen, die sich derart ergeben, enthalten allerdings $3n + m$ Unbekannte, nämlich die Koordinaten — und zwar als Funktionen der Zeit — und überdies noch die Multiplikatoren; da uns aber überdies zwischen diesen Unbekannten noch weitere m Gleichungen in der Form der Bedingungsgleichungen (2) zur Verfügung stehen, so können wir aus diesen $(3n + m)$ Gleichungen die Multiplikatoren (als Funktionen der Zeit) berechnen. Haben wir aber ihre Werte gefunden, so

brauchen wir diese lediglich in die gleich Null gesetzten Klammerausdrücke der Gleichung (4) einzusetzen, um für jeden beliebigen Massenpunkt des Systems sofort die Bewegungsgleichungen anschreiben zu können. Sie lauten z. B. für den h-ten Massenpunkt

$$(5)\qquad \begin{cases} m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{d t^2} = X_h + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_h} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_h} + \ldots, \\ m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{d t^2} = Y_h + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_h} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_h} + \ldots, \\ m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{d t^2} = Z_h + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_h} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_h} + \ldots. \end{cases}$$

Im Gegensatze zu den ebenfalls von Lagrange aufgefundenen Bewegungsgleichungen, die wir in der nächsten Vorlesung kennen lernen wollen, bezeichnet man die hier abgeleiteten als die Lagrangeschen Differentialgleichungen der ersten Form.

Der erste große Vorteil, den die Methode der Multiplikatoren gewährt, besteht also darin, daß sie uns direkt die Bewegungsgleichungen jedes einzelnen Massenpunktes des Systems liefert; und dies ist eben dadurch möglich, daß wir auf Grund dieser Methode die Gleichung (4) so behandeln können, als ob die Variationen aller Koordinaten voneinander unabhängig wären, d. h. mit anderen Worten, als ob das System ein völlig freies wäre. Diese Zurückführung der unfreien Bewegung auf eine freie wurde dadurch bewirkt, daß wir die Summe der virtuellen Momente der tatsächlich angreifenden Kräfte noch um die Produkte $\lambda\,\delta L$, $\mu\,\delta M$, $\nu\,\delta N$ usw. vermehrten.

Man kann aber nun diese Produkte wiederum als die virtuellen Momente von fingierten Zusatzkräften ansehen und sich infolgedessen ein unfreies System, das bestimmten Bedingungen unterliegt, stets ersetzt denken durch ein ihm äquivalentes, freies System, an dem außer den tatsächlich angreifenden Kräften noch fingierte Zusatzkräfte[1] zur Geltung kommen, deren virtuelle Momente gleich sind den mit den Lagrangeschen Multiplikatoren multiplizierten Differentialausdrücken der Bedingungsgleichungen.

Über die physikalische Natur dieser fingierten Zusatzkräfte gibt uns aber eine einfache Überlegung Aufschluß, bei der wir einen einzelnen Massenpunkt betrachten wollen, der sich nur in einer vorgeschriebenen Fläche bewegen kann. Lautet die Gleichung dieser Fläche

$$(6)\qquad \varphi(x, y, z) = 0,$$

so wird das virtuelle Moment der fingierten Zusatzkraft, die wir in diesem Falle mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen wollen, gleich sein

$$(7)\qquad K\,\delta k = \lambda\,\delta\varphi\,.$$

[1] Es ist klar (vgl. Fig. 42), daß diese fingierten Zusatzkräfte den „verlorenen" Kräften gleich und entgegengesetzt sein müssen.

Lagrange kann aber nun leicht zeigen, daß dieser Ausdruck das Moment einer Kraft darstellt, die auf der durch die Gleichung (6) gegebenen Fläche senkrecht steht.

Denn das virtuelle Moment einer Kraft $\mathfrak{P}$ kann man, wie wir schon in einer früheren Vorlesung sahen[1], immer in der Form darstellen $P\,\delta p$, wobei

$$\delta p = \cos\alpha\cdot\delta x + \cos\beta\cdot\delta y + \cos\gamma\cdot\delta z, \tag{8}$$

wenn man unter α, β, γ die Winkel versteht, die die Richtung der Kraft mit den drei Koordinatenachsen bildet. Nun stellt aber andererseits die Gleichung

$$\cos\alpha\cdot\delta x + \cos\beta\cdot\delta y + \cos\gamma\cdot\delta z = 0 \tag{9}$$

die Gleichung einer Ebene[2] dar, deren Normale mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet und somit dieselbe Richtung hat wie die Kraft $\mathfrak{P}$.

Wir erkennen also durch einen Vergleich der Formeln (8) und (9), daß eine Kraft $\mathfrak{P}$, deren Moment gleich ist $P\cdot\delta p$, immer senkrecht stehen muß auf einer Ebene[3], die durch die Gleichung gegeben ist

$$\delta p = 0.$$

Es ist aber klar, daß die Kraft $\mathfrak{P}$ ebenso auch auf einer Ebene senkrecht stehen muß, deren Differentialgleichung etwa lautet

$$\delta\chi = 0,$$

wofern der Ausdruck $\delta\chi$ dem Ausdrucke δp genau proportional ist.

Ist also das virtuelle Moment unserer fingierten Zusatzkraft $\mathfrak{R}$ gleich $\lambda\,\delta\varphi$, so muß die Zusatzkraft auf einer Ebene senkrecht stehen, deren Differentialgleichung

$$\delta\varphi = 0 \tag{10}$$

ist.

Da durch diese Gleichung aber eine Tangentialebene an die Fläche $\varphi = 0$ dargestellt wird, so muß also die Kraft $\mathfrak{R}$ immer auch senkrecht auf der Fläche stehen, für die die Bedingungsgleichung

$$\varphi = 0$$

einen analytischen Ausdruck darstellt.

---

[1] Vorles. 4, Gleichung (2).

[2] Bekanntlich lautet die sogenannte Normalform der Gleichung einer Ebene

$$(x' - x)\cos\alpha + (y' - y)\cos\beta + (z' - z)\cos\gamma = 0.$$

wenn x', y', z' die Koordinaten des Fußpunktes des Lotes sind, das man von dem Koordinatenursprunge auf die Ebene fällt, und α, β, γ die Winkel bedeuten, die dieses Lot mit den drei Koordinatenachsen bildet. Indem man diese Gleichung differentiiert und dann (was, wie wir sahen, ohne weiteres statthaft ist) überall das Zeichen d durch das Zeichen δ ersetzt, erhält man die Gleichung (9).

[3] Vgl. Mécanique analytique, part. I, sect. II, § 8.

Nachdem wir derart die Richtung der fingierten Zusatzkraft ermittelt haben, wollen wir nun auch ihre Größe feststellen, und hierzu brauchen wir nach Gleichung (7) nur zu wissen, wie groß δk ist. Nun ist aber wieder nach Formel (8)

$$\delta k = \cos\alpha' \cdot \delta x + \cos\beta' \cdot \delta y + \cos\gamma' \cdot \delta z, \tag{11}$$

wenn wir unter α', β', γ' die Winkel verstehen, die die auf der Tangentialebene $\delta\varphi = \emptyset$ errichtete Normale mit den Koordinatenachsen bildet.

Da aber die Tangentialebene ebensowohl durch die Gleichung dargestellt wird

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = \emptyset \tag{12}$$

als auch nach Formel (9) durch die Gleichung

$$\cos\alpha' \cdot \delta x + \cos\beta' \cdot \delta y + \cos\gamma' \cdot \delta z = \emptyset,$$

so gelten, wenn wir mit ε einen bestimmten Proportionalitätsfaktor bezeichnen, die Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha' &= \varepsilon \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ \cos\beta' &= \varepsilon \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \cos\gamma' &= \varepsilon \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Da nach einem elementaren Satze der Geometrie aber

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

sein muß, so ergibt sich für den Proportionalitätsfaktor ε der Wert

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}. \tag{14}$$

Da nun, wie ein Vergleich der Formeln (11) und (12) zeigt,

$$\delta k = \varepsilon \cdot \delta\varphi \tag{15}$$

ist, so folgt auf Grund der Relation (7) für den absoluten Wert der Zusatzkraft

$$K = \lambda \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}, \tag{16}$$

wobei eben der Wert von λ von den tatsächlich angreifenden Kräften abhängen wird.

Nachdem wir derart für einen einzelnen Massenpunkt, der sich in einer vorgeschriebenen Fläche bewegt, nach Größe und Richtung die fingierte Zusatzkraft ermittelt haben[1], gehen wir zu der Betrachtung

[1] Dieses Resultat stimmt natürlich mit demjenigen überein, das wir schon am Schlusse der 15. Vorles. im Anschlusse an die Eulerschen Sätze gewonnen haben.

eines beliebigen Systems über, das beliebigen Bedingungsgleichungen unterliege. Wir erkennen dann leicht auf Grund der Gleichungen (3), daß wir die mit dem unbestimmten Faktor multiplizierte Variation jeder Bedingungsgleichung, z. B. $M = \emptyset$, im allgemeinsten Falle immer in n Glieder zerlegen können, deren jedes die Form hat

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial x_h} \delta x_h + \frac{\partial M}{\partial y_h} \delta y_h + \frac{\partial M}{\partial z_h} \delta z_h \right) \tag{17}$$

($h = 1$ bis n), und jeder dieser n Ausdrücke stellt dann nach dem früher Gesagten das virtuelle Moment einer Kraft dar, die man sich an dem h-ten Massenpunkte angreifend zu denken hat und die auf einer Ebene senkrecht steht, deren Gleichung man erhält, wenn man den Ausdruck (17) gleich Null setzt.

Es ergibt sich also hieraus, daß (in dem allgemeinsten Falle) jede Bedingungsgleichung des Systems n Zusatzkräften gleichwertig ist, die man sich an den n Massenpunkten des Systems angreifend denken muß. Man muß also zu denselben Bewegungsgleichungen des Systems gelangen, je nachdem ob man die Bedingungsgleichungen oder aber die fingierten Zusatzkräfte der Berechnung zugrunde legt; und es ist somit klar, daß, wenn man die Zusatzkräfte in Rechnung bringt, man die einzelnen Massen als ganz frei ansehen und von den zwischen ihnen bestehenden Verbindungen vollständig abstrahieren kann.[1]

Betrachten wir nun im besonderen ein System von untereinander starr verbundenen Massenpunkten, so werden die starren Verbindungen, die zwischen den einzelnen Massenpunkten bestehen, ihren analytischen Ausdruck in $n(n-1)$ Gleichungen von der Form finden

$$(x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2 - r_{hk}^2 = \emptyset. \tag{18}$$

Indem man diese Gleichungen differentiiert und dann das Zeichen d durch das Zeichen δ ersetzt, findet man

$$\left\{ \begin{aligned} &(x_h - x_k)\,\delta x_h + (y_h - y_k)\,\delta y_h + (z_h - z_k)\,\delta z_h + (x_k - x_h)\,\delta x_k \\ &\qquad + (y_k - y_h)\,\delta y_k + (z_k - z_h)\,\delta z_k = \emptyset. \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Indem man diese Gleichung nun noch mit dem unbestimmten Faktor λ multipliziert und sodann die linke Seite in zwei Teile zerlegt, erkennt man, daß aus der starren Verbindung zwischen dem h-ten und dem

[1] Da auch umgekehrt wieder jeder tatsächlich angreifenden Kraft eine fingierte Bedingungsgleichung äquivalent ist, so kann man sich die Bewegung jedes beliebigen Systems ersetzt denken durch eine kräftelose Bewegung, die nur unter dem Einflusse des Beharrungsvermögens erfolgt, bei der aber zu den Bedingungsgleichungen, die durch die tatsächlich bestehenden Verbindungen gegeben sind, noch überdies Bedingungsgleichungen hinzutreten, die von Verbindungen mit fingierten Massen herrühren. Dieser Gedanke, durch den eine Eliminierung des Kraftbegriffes aus dem physikalischen Naturbilde möglich wird, stellt die Grundidee dar, die der originellen Mechanik von Heinrich Hertz zugrunde liegt. Man vergleiche hierzu eine ungemein interessante Stelle in Eulers „Mechanica", pars II, § 29.

k-ten Massenpunkte zwei gleich große, aber entgegengesetzte Zusatzkräfte entspringen, deren eine im h-ten, deren andere im k-ten Massenpunkte angreift und dem Komponenten gleich sind

$$\lambda(x_h - x_k), \quad \lambda(y_h - y_k), \quad \lambda(z_h - z_k),$$

bzw.

$$\lambda(x_k - x_h), \quad \lambda(y_k - y_h), \quad \lambda(z_k - z_h).$$

Da sich also die Komponenten dieser Zusatzkräfte untereinander ebenso verhalten, wie die Projektionen der Verbindungsstrecke auf die drei Koordinatenachsen, so müssen die beiden Zusatzkräfte die Richtung der Verbindungslinie haben.[1] Den starren Verbindungen des

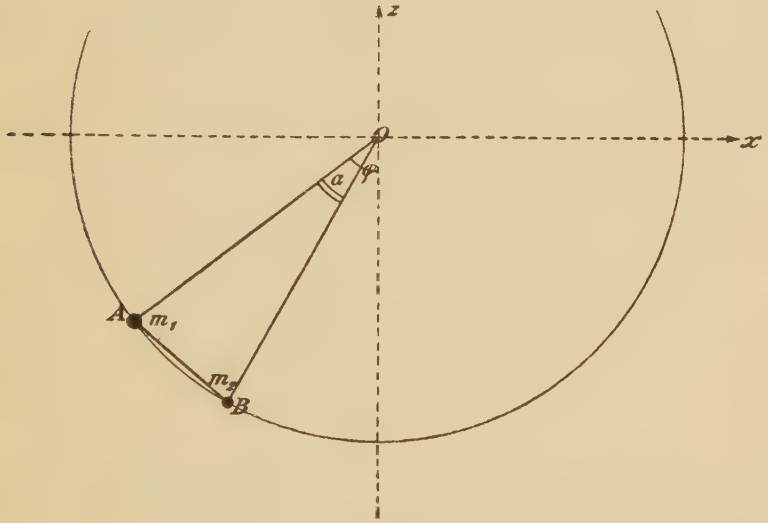

Fig. 43.

Systems sind also fingierte innere Kräfte äquivalent, die in der Richtung der Verbindungen der Massenpunkte wirken und die das dritte Newtonsche Bewegungsgesetz befolgen. Hieraus ergibt sich aber, daß man die Integralprinzipe der Mechanik, die wir zunächst nur für freie Systeme abgeleitet haben, auch auf starre Systeme anwenden kann — wie dies in der Tat ja schon bezüglich der Sätze des Schwerpunktes und der lebendigen Kraft Huygens im Wesen richtig erkannt hatte.

[1] Dies hätte man auch direkt aus der Gleichung (18) schließen können, da ja diese Gleichung eine Kugelfläche darstellt, deren Zentrum derjenige der beiden Massenpunkte bildet, den wir uns fest denken. Der Radius steht aber immer auf der Kugelfläche senkrecht.

Um uns nun den Sinn der Methode der Multiplikatoren an einem einfachen Beispiele klar zu machen, betrachten wir zwei Massenpunkte m_1 und m_2, die miteinander durch einen unbiegsamen masselosen Draht von der Länge l verbunden seien; beide seien, während sie nur dem Einflusse der Schwerkraft unterliegen, gezwungen, auf einer Kreislinie von dem Halbmesser a zu bleiben, die in der x-z-Ebene liege.

Wir können uns dies etwa derart realisiert denken, daß wir uns die beiden Massen in den Punkten A und B überdies durch starre unbiegsame masselose Drähte, die beide die Länge a haben, mit einem festen Punkte O verbunden denken (Fig. 43). Die ganze Anordnung stellt dann ein physisches Pendel dar, das um eine durch den Punkt O gelegte Drehachse schwingt, die die Richtung der y-Achse habe.

Wir wählen den Punkt O als Koordinatenursprung. Die Universalformel (1) ergibt dann in unserem Falle, da die Schwerkraft die Richtung der negativen z-Achse hat, die Gleichung (wir wollen gleich alle Vorzeichen umkehren)

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &m_1\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\delta x_1+\frac{d^2y_1}{dt^2}\delta y_1+\frac{d^2z_1}{dt^2}\delta z_1+g\,\delta z_1\right)\\ &+m_2\left(\frac{d^2x_2}{dt^2}\delta x_2+\frac{d^2y_2}{dt^2}\delta y_2+\frac{d^2z_2}{dt^2}\delta z_2+g\,\delta z_2\right)=0. \end{aligned}\right.$$

Hierzu kommen noch fünf Bedingungsgleichungen, nämlich

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} x_1^2+z_1^2-a^2&=0,\\ x_2^2+z_2^2-a^2&=0,\\ (x_1-x_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2&=0.\\ y_1&=0,\\ y_2&=0. \end{aligned}\right.$$

Durch Differentiation dieser fünf Bedingungsgleichungen ergeben sich — indem man das Zeichen d durch das Zeichen δ ersetzt — die Beziehungen

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} x_1\,\delta x_1+z_1\,\delta z_1&=0,\\ x_2\,\delta x_2+z_2\,\delta z_2&=0,\\ (x_1-x_2)\,\delta x_1+(z_1-z_2)\,\delta z_1+(x_2-x_1)\,\delta x_2+(z_2-z_1)\,\delta z_2&=0,\\ \delta y_1&=0,\\ \delta y_2&=0. \end{aligned}\right.$$

Wir multiplizieren diese fünf Gleichungen mit den unbestimmten Faktoren λ, μ, ν, σ, τ und addieren sie sodann zu der Gleichung (20). Indem wir diese dann nach der Methode von Lagrange in so viele partikuläre Gleichungen zerfällen, als Koordinaten vorhanden sind, finden wir zunächst

$$m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+\sigma=0,$$

$$m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}+\tau=0.$$

Aus der vierten und fünften Bedingungsgleichung folgt aber, daß diese Gleichungen einfach verschwinden müssen (daß also auch $\sigma = \tau = 0$), so daß nur vier Bewegungsgleichungen in der Form übrig bleiben

$$(23)\qquad \begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \lambda x_1 + \nu(x_1 - x_2) = 0, \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \lambda z_1 + \nu(z_1 - z_2) + m_1 g = 0, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \mu x_2 + \nu(x_2 - x_1) = 0, \\ m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} + \mu z_2 + \nu(z_2 - z_1) + m_2 g = 0. \end{cases}$$

Indem wir diese vier Gleichungen mit den ersten drei Bedingungsgleichungen (21) kombinieren, werden wir dann trachten müssen, aus diesen sieben Gleichungen die unbestimmten Faktoren λ, μ und ν als Funktionen der Zeit (oder eventuell auch bestimmter Koordinaten) zu berechnen. Wenn man sich dabei natürlich auch mit großem Vorteile der Integrationsmethoden bedienen wird, die zu den Integralsätzen der Mechanik führen, so wird doch, wie man sogleich erkennt, die Rechnung sehr mühselig werden; ungleich einfacher gelangt man bei diesem Beispiele — wie fast immer bei speziellen mechanischen Aufgaben — mittels einer dritten ebenfalls von Lagrange erfundenen Methode zum Ziele, mit der wir uns in der nächsten Vorlesung befassen wollen.

Achtzehnte Vorlesung.

Die generalisierten Bewegungsgleichungen von Lagrange.

In der letzten Vorlesung haben wir die beiden Methoden kennen gelernt, mittels deren man nach Lagrange aus seiner dynamischen Universalformel die partikulären Bewegungsgleichungen entwickeln kann, die in jedem speziellen Falle zur Beschreibung der tatsächlichen Bewegung des Systems vollkommen ausreichen; die Universalformel lautet, wie wir sahen,

$$(1)\quad \left\{ \sum_{h=1}^{h=n} \left\{ \left(X_h - m_h \cdot \frac{d^2 x_h}{dt^2} \right) \delta x_h + \left(Y_h - m_h \cdot \frac{d^2 y_h}{dt^2} \right) \delta y_h + \left(Z_h - m_h \cdot \frac{d^2 z_h}{dt^2} \right) \cdot \delta z_h \right\} = 0. \right.$$

Aus dieser Universalformel hat man nach der einen Methode, falls das System durch m Bedingungsgleichungen gebunden ist, die Variationen von m Koordinaten zu eliminieren; man kann dann, indem man die übriggebliebenen $3n - m$ Koordinaten als unabhängig variabel ansieht, die Hauptgleichung in $3n - m$ Partialgleichungen zerfällen, die in Verbindung mit den m Bedingungsgleichungen stets ausreichen, um die Bewegung eines jeden der n Punkte zu beschreiben.

Die zweite Methode bestand, wie wir sahen, darin, daß man das System so behandelt, als ob es aus lauter völlig freien und durch nichts in ihrer Bewegungsfreiheit beschränkten Punkten bestünde, an denen aber außer den tatsächlich angreifenden Kräften X_h, Y_h, Z_h ($h = 1$ bis n) überdies noch fingierte Zusatzkräfte zur Geltung kommen, deren Größe man eben mittels der Methode der unbestimmten Multiplikatoren ermittelt.

Wenn also auch diese beiden Methoden zur Lösung jedes dynamischen Problems vollständig ausreichen, so wird doch der Weg der Rechnung fast immer so kompliziert sein, daß man zweckmäßig, anstatt mit den $3n$ orthogonalen Koordinaten zu operieren, sich lieber von vorneherein auf die Betrachtung von $3n - m$ geeignet gewählten, unabhängigen Variabeln beschränkt, als deren Funktionen sich die $3n$ orthogonalen Koordinaten darstellen lassen (wofür wir ja schon in der vierten Vorlesung ein Beispiel kennen lernten); diese unabhängigen Variabeln, diese

„generalisierten Koordinaten" können im allgemeinen ganz beliebige Größen, sie müssen nicht einmal Strecken, sondern können auch Winkel, Flächen oder Volumina sein. (Die Gleichungen, die den Zusammenhang der orthogonalen mit den generalisierten Koordinaten ausdrücken, können auch die Zeit explizite enthalten; doch wollen wir diesen Fall von unseren folgenden Betrachtungen ausschließen.)

Es kann nun natürlich gar keiner theoretischen Schwierigkeit unterliegen, in jedem speziellen Falle die dynamische Universalgleichung (1) derart umzuformen, daß sie statt der $3n$ orthogonalen Koordinaten nur mehr die in dem betreffenden Falle gewählten unabhängigen Variabeln enthält. Es sind hierzu lediglich Rechnungen notwendig, die zwar mitunter sehr kompliziert werden können, deren Gang aber stets von vorneherein vorgeschrieben ist. Man gibt hierzu der Gleichung (1) zunächst eine für die Transformation geeignetere Gestalt, in der wir sie bereits kennen gelernt haben[1], nämlich

$$(2) \qquad \left\{ \sum_{h=1}^{h=n} m_h \left(\frac{d^2 x_h}{dt^2} \delta x_h + \frac{d^2 y_h}{dt^2} \delta y_h + \frac{d^2 z_h}{dt^2} \delta z_h \right) \right. \\ \left. = P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + R \cdot \delta r + \ldots, \right.$$

wenn wir unter P, Q, R usw. die an dem Systeme angreifenden Kräfte verstehen, unter δp, δq, δr usw. die Projektionen der virtuellen Verrückungen ihrer Angriffspunkte auf die Richtungen der Kräfte.

Man hat dann einfach die Gleichungen, die die $3n$ orthogonalen Koordinaten mit den unabhängigen Variabeln verknüpfen, zu variieren, andererseits zweimal zu differentiieren und die so erhaltenen Ausdrücke für d^2x und δx usw. in die Gleichung (2) einzusetzen: schließlich hat man dann noch die Variationen δp, δq, δr usw. als Funktionen der unabhängigen Variablen darzustellen. Damit besitzt man die Universalformel in den neuen generalisierten Koordinaten und man braucht sie dann, da diese voneinander unabhängig sind, nur nach deren Variationen zu ordnen und sodann zu zerfällen, um die Bewegungsgleichungen des Systems zu erhalten.

Diese Methode muß in allen Fällen zum Ziele führen; andere Gleichungen als die Gleichung (2) sind also zur Behandlung dynamischer Probleme nicht unbedingt notwendig; Lagrange gebührt aber nun das außerordentliche Verdienst, daß er in seinen generalisierten Bewegungsgleichungen den Physikern ein Mittel gab, durch das dieser Transformationsprozeß eine außerordentliche Vereinfachung erfährt. Mit diesen Gleichungen wollen wir uns nun in dieser Vorlesung befassen, wobei wir uns bei ihrer Ableitung so genau wie möglich an den Gedankengang halten wollen, den Lagrange selbst in seiner „Analytischen Mechanik" bei ihrer Deduktion eingeschlagen hat[2] und der es offenbar

[1] Vorles. 16, Gleichung (6).

[2] Mécanique analytique (2. Aufl.), part. II, sect. IV.

auch war, durch den Lagrange zu der Entdeckung dieser so ungemein wertvollen Gleichungen geführt wurde.

Lagrange ging also von der Gleichung (2) aus und stellte sich die Aufgabe, sie derart zu transformieren, daß in ihr statt der orthogonalen Koordinaten nur mehr die unabhängigen Variabeln ξ, ψ, φ usw. enthalten sein sollen. Lagrange fing also naturgemäß damit an, zunächst das Produkt $d^2x \cdot \delta x$ umzuformen, gebrauchte aber hierbei sogleich den Kunstgriff, daß er diesen Ausdruck zu einem vollständigen Differentiale ergänzte, nämlich zu dem Differentiale $d(dx \cdot \delta x)$. Denn nach der Regel, die für das Differentiieren eines Produktes gilt, ist ja

$$d(dx \cdot \delta x) = d^2x \cdot \delta x + dx \cdot d\,\delta x. \tag{3}$$

Da nun nach einem bekannten Grundsatze der Variationsrechnung

$$d\,\delta x = \delta\, dx \tag{4}$$

ist und andererseits[1]

$$\delta (dx)^2 = 2dx \cdot \delta\, dx,$$

so kann also Lagrange, indem er analoge Ausdrücke wie für die x-Koordinate auch für die y- und die z-Koordinate bildet, die Gleichung aufstellen

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2x \cdot \delta x + d^2y \cdot \delta y + d^2z \cdot \delta z = \\ \quad d(dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y + dz \cdot \delta z) - \frac{1}{2}\delta (dx^2 + dy^2 + dz^2). \end{array} \right. \tag{5}$$

Durch diese Gleichung muß jedenfalls die Transformation der Bewegungsgleichungen bereits wesentlich erleichtert werden; denn nun ist es nicht mehr notwendig, die zweiten Differentiale der orthogonalen Koordinaten umzuformen, es genügt, die Transformationen mit den ersten Differentialen vorzunehmen. Um den auf der linken Seite der Gleichung (5) stehenden Ausdruck, den wir kurz Δ nennen wollen, in den unabhängigen Koordinaten auszudrücken, braucht man nur die beiden auf der rechten Seite stehenden eingeklammerten Ausdrücke zu transformieren und dann den ersten zu differentiieren und den zweiten zu variieren. Wir wollen die beiden auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke der Einfachheit halber kurz mit I und II bezeichnen, so daß also in unseren vorübergehend eingeführten Abkürzungen die Gleichung (5) einfach lautet

$$\Delta = d\,\mathrm{I} - \tfrac{1}{2}\delta\,\mathrm{II}.$$

Lassen sich nun die $3n$ Koordinaten unseres Systems, zwischen denen bestimmte Beziehungen bestehen, vollständig durch eine bestimmte Anzahl unabhängiger Variabeln (ξ, ψ, φ ...) ausdrücken, so gelten

[1] Im folgenden soll statt $(dx)^2$ immer einfach dx^2 geschrieben werden, was natürlich nicht mit $d(x^2)$ zu verwechseln ist.

jedenfalls für die Koordinaten eines beliebigen Punktes (wir nennen sie kurz x, y, z) die Beziehungen

$$(6)\qquad \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \ldots, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \ldots, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \ldots. \end{cases}$$

Diese Gleichungen behalten natürlich auch ihre Gültigkeit, wenn wir überall das Zeichen d durch das Zeichen δ ersetzen, so daß wir ganz analoge Gleichungen wie für die Differentiale von x, y, z auch für ihre Variationen erhalten.

Setzen wir die derart gefundenen Werte nun in den Ausdruck I ein, so erhalten wir

$$dx \cdot \delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \psi} d\psi + \ldots\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \delta\xi + \frac{\partial x}{\partial \psi} \delta\psi + \ldots\right)$$

und somit finden wir

$$(7)\qquad \begin{cases} I = F \cdot d\xi \cdot \delta\xi + G\,(d\xi \cdot \delta\psi + d\psi \cdot \delta\xi) \\ \qquad + H \cdot d\psi \cdot \delta\psi + J\,(d\xi \cdot \delta\varphi + d\varphi \cdot \delta\xi) \\ \qquad + \ldots, \end{cases}$$

wo F, G, H, J usw. bestimmte Funktionen der unabhängigen Variabeln ξ, ψ, φ ... sein werden.[1]

In dem Ausdrucke, den man derart für I gefunden hat, braucht man nun nur die δ in d zu verwandeln, um den Ausdruck für II zu erhalten. Es ist also

$$(8)\qquad II = F \cdot d\xi^2 + 2G \cdot d\xi \cdot d\psi + H \cdot d\psi^2 + 2J \cdot d\xi \cdot d\varphi + \ldots$$

Nachdem es derart Lagrange gelungen ist, die Größen I und II durch die unabhängigen Koordinaten auszudrücken, hat er nun nach dem früher Gesagten I zu differentiieren und II zu variieren. Er erhält derart

$$(9)\qquad \begin{cases} dI = d\,(F \cdot d\xi) \cdot \delta\xi + F \cdot d\xi \cdot d\,\delta\xi \\ \qquad + d\,(G \cdot d\xi) \cdot \delta\psi + G \cdot d\xi \cdot d\,\delta\psi \\ \qquad + d\,(G \cdot d\psi) \cdot \delta\xi + G \cdot d\psi \cdot d\,\delta\xi \\ \qquad + d\,(H \cdot d\psi) \cdot \delta\psi + H \cdot d\psi \cdot d\delta\psi \\ \qquad + \ldots. \end{cases}$$

[1] Es ist z. B.

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2$$

oder

$$G = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi}.$$

In analoger Weise findet Lagrange

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \delta II = {} & \delta F\cdot d\xi^2 + 2F\cdot d\xi\cdot\delta\, d\xi \\ & + 2\delta G\cdot d\xi\cdot d\psi + 2G\cdot d\psi\cdot\delta\, d\xi \\ & + 2G\cdot d\xi\cdot\delta\, d\psi + \delta H\cdot d\psi^2 \\ & + 2H\cdot d\psi\cdot\delta\, d\psi + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Um nun den Ausdruck für Δ in den neuen Koordinaten zu erhalten, hat Lagrange einfach $\delta\, II$ durch 2 zu dividieren und von $d\, I$ abzuziehen. Da, wie schon gesagt, die Operationen $d\delta$ und δd äquivalent sind, hebt sich eine Reihe von Gliedern gegenseitig auf, so daß schließlich der verhältnismäßig einfache Ausdruck übrig bleibt

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta = {} & d(F\cdot d\xi)\cdot\delta\xi - \tfrac{1}{2}\,\delta F\cdot d\xi^2 \\ & + d(G\cdot d\xi)\cdot\delta\psi + d(G\cdot d\psi)\cdot\delta\xi \\ & - \delta G\cdot d\xi\cdot d\psi + d(H\cdot d\psi)\cdot\delta\psi \\ & - \tfrac{1}{2}\,\delta H\cdot d\psi^2 + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Durch einen Vergleich der Formeln (9), (10) und (11) erkennt nun Lagrange — und diese Erkenntnis stellt die eigentliche Grundidee dar, die den sogenannten generalisierten Bewegungsgleichungen zugrunde liegt — Lagrange erkennt also, daß es eigentlich ganz überflüssig ist, den Ausdruck I überhaupt zu berechnen; daß es vollkommen genügt, den Ausdruck II auszurechnen, da man aus ihm ohne weiteres den Ausdruck Δ erhalten kann.

Man kann nämlich sowohl in dem Ausdrucke für Δ als auch in dem Ausdrucke für $\delta\, II$ zwei Arten von Gliedern unterscheiden. In dem Ausdrucke für $\delta\, II$ finden wir Glieder, in denen das Zeichen $\delta\, d$ vorkommt und solche, in denen es nicht vorkommt. Wir wollen unter den Gliedern, in denen das Zeichen $\delta\, d$ vorkommt, eine punktierte Linie anbringen und sie kurz die punktierten Glieder nennen. Ebenso wollen wir in dem Ausdrucke für Δ eine punktierte Linie unter den untereinander durchaus analogen Gliedern anbringen, die — um es kurz zu sagen — eine Klammer enthalten.

Man erkennt dann mit Lagrange sofort, daß man ohne weiteres die nicht punktierten Glieder des Ausdruckes für Δ aus den nicht punktierten Gliedern des Ausdruckes für $\delta\, II$ erhält, wenn man diese Glieder durch zwei dividiert und ihre Vorzeichen umkehrt. Ebenso erhält man aus den punktierten Gliedern des Ausdruckes für $\delta\, II$ die punktierten Glieder des Ausdruckes für Δ, wenn man auch hier wieder die Glieder durch zwei dividiert, das Zeichen d, das unmittelbar auf das Zeichen δ folgt, von dort wegnimmt und es vor den einzuklammern-

den Ausdruck setzt, der das Produkt aus einer der Größen $F, G, H, J \ldots$ und dem Differentiale einer der unabhängigen Variabeln darstellt. Auf diese Weise verwandelt sich z. B. das Glied $2G \cdot d\xi \cdot \delta\, d\psi$ in das Glied $d\,(G \cdot d\xi) \cdot \delta\psi$.

Dieser Regel, die uns zeigt, wie man aus dem Ausdrucke $\delta\, II$ direkt den Ausdruck Δ erhalten kann — ohne daß es erst notwendig wäre, auch den Ausdruck $\delta\, I$ zu berechnen — dieser Regel kann man nun auch leicht einen einfachen mathematischen Ausdruck verleihen. Wir wollen die Funktion, die wir erhalten, wenn wir in dem Ausdrucke

$$\tfrac{1}{2}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

die unabhängigen Koordinaten einsetzen, mit Ω bezeichnen und können dann Ω als eine Funktion der unabhängigen Koordinaten und ihrer Differentiale, also als eine Funktion der Veränderlichen ξ, ψ, φ, $\ldots$, $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, $\ldots$ ansehen.

Dann läßt sich die Variation der Funktion Ω durch die Gleichung darstellen

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta\Omega = {} & \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\delta\varphi + \ldots \\ & + \frac{\partial\Omega}{\partial\, d\xi}\delta\, d\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\, d\psi}\delta\, d\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\, d\varphi}\delta\, d\varphi + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Nun ist aber $\delta\Omega$ nichts anderes als $\frac{1}{2}\,\delta\, II$ und man erkennt ohne weiteres, daß (eben bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$) die Glieder, die in dem Ausdrucke für $\delta\Omega$ in der ersten Zeile stehen, identisch sind mit den nicht punktierten Gliedern in dem Ausdrucke für $\delta\, II$ und ebenso die Glieder, die in der zweiten Zeile des Ausdruckes für $\delta\Omega$ stehen, identisch sind mit den punktierten Gliedern des Ausdruckes für $\delta\, II$.

Um also aus $\delta\Omega$ den Ausdruck Δ zu gewinnen, hat man (da die Division durch zwei ja schon vorgenommen ist) nach dem früher Gesagten weiter nichts zu tun, als daß man bei den Gliedern der ersten Zeile das Vorzeichen umkehrt, bei den Gliedern der zweiten Zeile hingegen das Zeichen d von seinem Platze entfernt und es vor den einzuklammernden Bruch setzt. Wir erhalten somit die Beziehung

$$(13)\qquad \Delta = \left[-\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + d\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\, d\xi}\right)\right]\delta\xi + \ldots,$$

wobei wir eben auf der rechten Seite lauter durchaus analog gebaute Ausdrücke haben werden, in denen der Reihe nach für ξ die anderen unabhängigen Variabeln ψ, φ usw. einzusetzen sind.

Man erkennt nun ohne weiteres, daß der Ausdruck der linken Seite in der Gleichung (2), die wir ja transformieren wollen, gleich ist

$$\frac{1}{(dt)^2} \cdot \sum m_h \cdot \Delta_h,$$

wenn wir mit m_h und Δ_h $(h = 1, 2 \ldots, n)$ die Werte bezeichnen, die dem h-ten Massenpunkte eigen sind. Beachten wir weiter, daß andererseits

$$\frac{1}{(dt)^2} \cdot \sum m_h \cdot \Omega_h$$

ja nichts anderes ist als die gesamte lebendige Kraft des ganzen Systems, die wir T nennen wollen, so erhalten wir also, wenn wir in der Gleichung (13) beide Seiten mit $\frac{1}{dt^2} \cdot m_h$ multiplizieren und nachher über alle h von 1 bis n summieren, die Gleichung

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{h=1}^{h=n} \left[m_h \cdot \left(\frac{d^2 x_h}{dt^2} \delta x_h + \frac{d^2 y_h}{dt^2} \delta y_h + \frac{d^2 z_h}{dt^2} \delta z_h \right) \right] \\ \qquad = \left[-\frac{\partial T}{\delta \xi} + d\left(\frac{\partial T}{\partial d\xi} \right) \right] \delta \xi + \ldots . \end{array} \right.$$

Damit ist die Transformation der linken Seite der Gleichung (2) beendet; die rechte Seite kann man natürlich auch stets transformieren, indem man einfach die Größen δp, δq, $\delta r \ldots$ statt als Funktionen der $3n$ orthogonalen Koordinaten als Funktionen der unabhängigen Variabeln ausdrückt. Man kann dann stets die rechte Seite der Gleichung (2) derart umwandeln, daß wir erhalten

$$(15) \quad P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + R \cdot \delta r + \ldots = \Xi \cdot \delta \xi + \Psi \cdot \delta \psi + \Phi \cdot \delta \varphi + \ldots,$$

wobei die rechte Seite dieser Gleichung ebenso viele Summanden enthält, als es unabhängige Variable gibt und die Größen Ξ, Ψ, Φ usw., die man nach Lagrange als die generalisierten Kräfte bezeichnet, Funktionen der Größen P, Q, $R \ldots$ und der unabhängigen Variabeln sein werden.

Ebensowenig wie die unabhängigen Koordinaten die Dimension von Längen haben müssen, brauchen natürlich die generalisierten Kräfte, die also gewissermaßen die generalisierten Koordinaten zu vergrößern streben, die Dimension einer mechanischen Kraft zu besitzen. Es ist lediglich notwendig, daß das Produkt aus einer generalisierten Kraft und der zu ihr gehörigen generalisierten Koordinate stets die Dimension einer Arbeit hat; ist also z. B. die unabhängige Variable ein Winkel, so wird die zugehörige generalisierte Kraft ein Drehmoment, ist die unabhängige Variable eine Fläche, so wird die zugehörige generalisierte Kraft ein Druck und so fort. Natürlich ist es auch keineswegs notwendig, daß die verschiedenen unabhängigen Variabeln und infolgedessen auch keineswegs notwendig, daß die verschiedenen generalisierten Kräfte untereinander die gleichen Dimensionen haben.

Setzen wir nun in die Gleichung (2) für die linke Seite den Ausdruck der Gleichung (14) und für die rechte Seite den Ausdruck der Gleichung (15)

ein, so erhalten wir schließlich, wenn wir sämtliche Glieder auf dieselbe Seite schaffen,

$$(16)\qquad \begin{cases} \left[-\frac{\partial T}{\partial \xi}+d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right)-\Xi\right]\delta\xi \\ +\left[-\frac{\partial T}{\partial \psi}+d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right)-\Psi\right]\delta\psi \\ +\ldots=0. \end{cases}$$

Da aber nach der Voraussetzung die ξ, ψ, φ ... voneinander völlig unabhängig variabel sind, so kann Lagrange wiederum genau so wie bei dem Prinzipe der virtuellen Verrückungen[1] schließen, daß diese Summe nur dann Null sein kann, wenn jeder der Ausdrücke, mit denen die voneinander unabhängigen Variationen der generalisierten Koordinaten multipliziert erscheinen, einzeln für sich verschwindet. Es zerfällt also wiederum die durch Formel (16) dargestellte Hauptgleichung in eine bestimmte Anzahl partikulärer Gleichungen, die, da ihre Anzahl gleich ist der Anzahl der unabhängigen Variabeln, vollständig ausreichen, um die Bewegungen des Systems zu beschreiben.

Diese Bewegungsgleichungen unseres Systems können wir also in der Form anschreiben

$$(17)\qquad \begin{cases} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \xi}=\Xi, \\ d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \psi}=\Psi, \\ d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=\Phi \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Besonders einfach wird nun die Berechnung der generalisierten Kräfte, wenn die Kräfte P, Q, R ..., die auf das System einwirken, ein Potential besitzen. Denn dann wird einfach

$$(18)\qquad P\cdot\delta p+Q\cdot\delta q+R\cdot\delta r+\ldots=-\delta V.$$

Da aber die Änderung, die bei einem Lagenwechsel des Systems das Potential erfährt, vollständig durch die Anfangs- und Endlage bestimmt ist, Anfangs- und Endlage aber wieder vollständig durch die Werte der unabhängigen Variabeln gegeben sind, so muß also sein

$$(19)\qquad -\delta V=-\frac{\partial V}{\partial \xi}\cdot\delta\xi-\frac{\partial V}{\partial \psi}\cdot\delta\psi-\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cdot\delta\varphi-\ldots.$$

Ein Vergleich der Gleichung (19) mit den Gleichungen (18) und (15) ergibt aber sofort das wichtige Resultat, daß in dem Falle, daß die an dem System angreifenden Kräfte ein Potential besitzen, die generalisierten Kräfte einfach gleich sind den mit entgegengesetzten Vorzeichen ge-

[1] Vgl. Vorlesung 4.

nommenen partiellen Ableitungen des Potentials nach den generalisierten Koordinaten. Es ist also dann

$$(20)\qquad \begin{cases} \Xi = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \\ \Psi = -\dfrac{\partial V}{\partial \psi}, \\ \Phi = -\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \text{ usw.}, \end{cases}$$

so daß also, falls ein Potential existiert, die Bewegungsgleichungen des Systems die einfache Form annehmen

$$(21)\qquad d\left(\frac{\partial T}{\partial d\xi}\right) = \frac{\partial (T-V)}{\partial \xi} \text{ usw.}$$

Für die generalisierten Bewegungsgleichungen zieht man heute — wie nur kurz erwähnt sei — gewöhnlich eine andere Schreibweise vor. Man bezeichnet nämlich die unabhängigen Variabeln einfach mit p_i $(i=1, 2 \ldots s)$[1], die generalisierten Kräfte mit P_i und schreibt weiter statt

$$d\left(\frac{\partial T}{\partial d p_i}\right),$$

indem man den Differentialquotienten der unabhängigen Koordinate nach der Zeit mit $\dot{p}_i$ bezeichnet,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i}\right).$$

In dieser Schreibweise lauten also die Bewegungsgleichungen des Systems

$$(22)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_i} = P_i$$

oder, falls ein Potential existiert,

$$(23)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i}\right) = \frac{\partial (T-V)}{\partial p_i},$$

wobei für i der Reihe nach die Zahlen von 1 bis s einzusetzen sind.

Die Bedeutung der generalisierten Bewegungsgleichungen und die außerordentlichen Vorteile ihrer Benutzung wollen wir uns schließlich an dem Beispiele klar machen, das wir zum Schlusse der letzten Vorlesung betrachtet, jedoch wegen der allzu großen rechnerischen Schwierigkeiten nicht zu Ende geführt haben.

Wir führen nun, da das System nur einen Freiheitsgrad hat (denn den sechs Koordinaten stehen ja fünf Bedingungsgleichungen gegen-

[1] s ist also gleich $3n - m$, wenn n Massenpunkte vorhanden sind und zwischen ihren Koordinaten m Bedingungsgleichungen bestehen.

über), als einzige unabhängige Variable den Winkel φ ein, den die Gerade AO mit der negativen z-Achse bildet. Wir rechnen φ positiv, wenn AO links von der z-Achse sich befindet. Weiter bezeichnen wir mit γ den unveränderlichen Winkel AOB. Zwischen den orthogonalen und den generalisierten Koordinaten bestehen dann die Beziehungen

$$(24) \qquad \begin{cases} -x_1 = a \sin \varphi, \\ -z_1 = a \cos \varphi, \\ -x_2 = a \sin (\varphi - \gamma), \\ -z_2 = a \cos (\varphi - \gamma). \end{cases}$$

Durch Differentiation finden wir

$$(25) \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -a \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{z}_1 = a \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{x}_2 = -a \cos (\varphi - \gamma) \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{z}_2 = a \sin (\varphi - \gamma) \cdot \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Somit ergibt sich für die lebendige Kraft

$$(26) \qquad T = \frac{a^2 \dot{\varphi}^2}{2} (m_1 + m_2).$$

Wir erkennen somit, wie ungemein einfach bei unserem Beispiele der Ausdruck für die lebendige Kraft in generalisierten Koordinaten aussieht und bemerken zugleich, wie kompliziert der Gang der Rechnung werden würde, wenn wir die Gleichungen (25) nochmals nach der Zeit differentiieren müßten, wie es ohne das Hilfsmittel der generalisierten Bewegungsgleichungen notwendig wäre (so z. B. auch, wenn wir uns zur Lösung des Problems der Gleichungen (23) der letzten Vorlesung bedienen wollten).

Nach der Methode der generalisierten Bewegungsgleichungen ist aber der weitere Gang der Rechnung sehr einfach; wir finden ohne weiteres

$$(27) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a^2 \dot{\varphi} (m_1 + m_2) \end{cases}$$

und somit

$$(28) \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = a^2 \ddot{\varphi} (m_1 + m_2).$$

Sehr einfach können wir aber auch das Potential des Systems berechnen; denn da

$$(29) \qquad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = -m_1 g, \\ m_2 \dfrac{d^2 z_2}{dt^2} = -m_2 g \end{cases}$$

ist, sonst aber keine Kräfte auf das System wirken, so ist

$$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \tag{30}$$

oder in generalisierten Koordinaten ausgedrückt — auf Grund der Gleichungen (24) —

$$V = -g a [m_1 \cos \varphi + m_2 \cos (\varphi - \gamma)]. \tag{31}$$

Daher ist

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = g a [m_1 \sin \varphi + m_2 \sin (\varphi - \gamma)]. \tag{32}$$

Setzen wir die Werte aus den Gleichungen (28) und (32) in die Gleichung (23) ein, so erhalten wir somit die Bewegungsgleichung unseres Systems in der Form

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{a (m_1 + m_2)} [m_1 \sin \varphi + m_2 \sin (\varphi - \gamma)] = 0. \tag{33}$$

Neunzehnte Vorlesung.

Das Prinzip der kleinsten Aktion.

Die mechanischen Grundsätze, die wir zum Schlusse unserer Vorlesungen noch kennen lernen wollen und die man gewöhnlich als die Aktionsprinzipe der Mechanik bezeichnet, verdanken ihre Entstehung einem sehr allgemein gehaltenen Satze, der zu den Grundlagen der antiken Naturphilosophie gehörte. Er wurde von Aristoteles wiederholt in der Form ausgesprochen, daß die Natur nichts unvernünftig und daher auch nichts vergebens tue (*ἡ φύσις οὐδὲν ἀλόγως οὐδὲ μάτην ποιεῖ*).[1]

Die Natur sucht, wie Aristoteles und mit ihm die meisten Naturforscher des Altertums lehrten[2], stets mit den gegebenen Mitteln den größten Effekt zu erzielen, oder was dasselbe ist, sie wendet stets die einfachsten und geringsten Mittel auf, um ein gegebenes Ziel zu erreichen. Von diesem Grundsatze machten die antiken Physiker bereits bei der Erklärung mannigfacher Erscheinungen Gebrauch. Auf die geometrische Tatsache, daß die gerade Linie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten darstellt, suchten sie die physikalische Tatsache zurückzuführen, daß jeder rasch bewegte Körper eine gerade Bahn zurücklege, daß namentlich auch die optischen Strahlen (die sie sich in der Regel als „Sehstrahlen" von dem Auge ausgehend dachten[3]) sich in gerader Linie ausbreiten.

Die interessanteste Anwendung fand aber im Altertume das „Prinzip des kleinsten Aufwandes" in dem schönen Beweise, den Heron von Alexandria für das optische Reflexionsgesetz erbrachte. Heron zeigte nämlich[4], daß in der Tat ein Strahl, der von einem Punkte

---

[1] Aristoteles, de coelo II, 11, 291b, 13 und viele andere Stellen; sehr deutlich auch Olympiodor, in meteor. III, 2: *ἐπειδὴ γὰρ τοῦτο ὡμολογημένον ἐστὶ παρὰ πᾶσιν, ὅτι οὐδὲν μάτην ἐργάζεται ἡ φύσις οὐδὲ ματαιοπονεῖ.*

[2] Vgl. A. E. Haas, Ästhetische und teleologische Gesichtspunkte in der antiken Physik; Arch. f. Gesch. d. Philosophie, Bd. *22*, 1908, S. 80—113.

[3] Gerade dadurch erschien es aber den Alten noch wahrscheinlicher, daß bei der „Sehtätigkeit" des Menschen unnütze Verschwendungen vermieden werden.

[4] Heron, Katoptrik (fälschlich genannt Ptolemaei liber de speculis), cap. 4: dico igitur, quod omnium incidentium et refractorum (d. h. der zurückgeworfenen) in idem radiorum minimi sunt qui secundum aequales angulos in speculis planis et circularibus; si autem hoc, rationaliter in angulis aequalibus refringuntur.

A (Fig. 44) nach einem Punkte B durch Zurückwerfung an dem Spiegel SS' gelangen soll, dann den kürzesten Weg zurücklegt, wenn er von dem Spiegel derart reflektiert wird, daß der Winkel ACS gleich ist dem Winkel $S'CB$.

Denn fällt man von dem Punkte A ein Lot AE auf den Spiegel und verlängert man dieses um sich selbst und verbindet man den derart erhaltenen Punkt A' dann mit dem Punkte C, so erkennt man ohne weiteres, daß

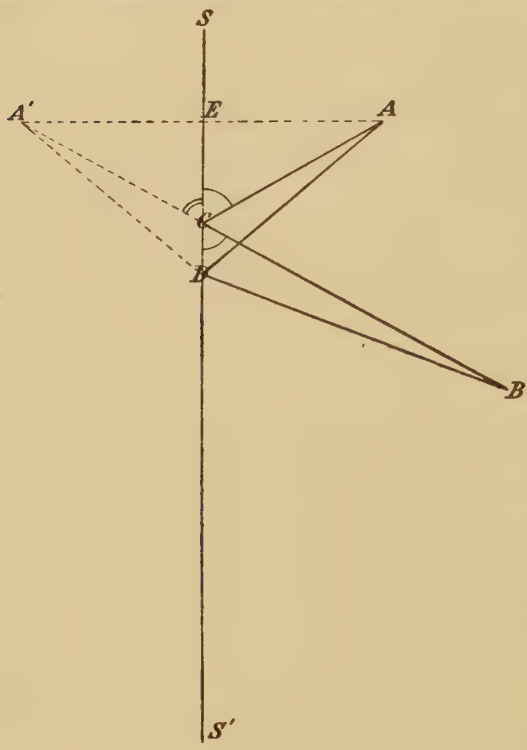

Fig. 44.

$$(1)\quad A'C+CB<A'D+DB$$

ist, wenn D einen beliebig in der Geraden SS' gewählten Punkt bedeutet. Denn unter allen Verbindungen von A' nach B ist eben die über C am kürzesten, weil sie allein eine ungeknickte Gerade darstellt; und das ist eben deshalb der Fall, weil nach der Voraussetzung

$$\sphericalangle S'CB=\sphericalangle SCA,$$

andererseits aber wiederum infolge der Kongruenz der Dreiecke AEC und $A'CE$

$$\sphericalangle SCA=\sphericalangle SCA'$$

ist. Infolge der Kongruenz der Dreiecke ist aber auch

$$A'C+CB=AC+CB$$

und

$$A'D+DB=AD+DB.$$

Der Strahl legt also tatsächlich dann den kürzesten Weg zwischen dem Punkte A, dem Spiegel und dem Punkte B zurück, wenn die Reflexion unter gleichen Winkeln erfolgt, womit vom Standpunkt einer teleologischen Naturanschauung aus das optische Reflexionsgesetz bewiesen erscheint.[1]

[1] Die Gesetze der geometrischen Optik sind natürlich ganz dieselben, ob nun der Strahl sich in der Richtung vom Gegenstande zum Auge oder in der umgekehrten Richtung fortpflanzt.

Die Ideen Herons haben ihre weitere Ausgestaltung im 17. Jahrhundert durch den großen Mathemiker Fermat gefunden, der ebenso wie Heron das Reflexionsgesetz, so das Brechungsgesetz teleologisch zu beweisen suchte. Während aber Heron das Reflexionsgesetz als von vorneherein gegeben ansah und es dadurch begründete und gewissermaßen nachträglich rechtfertigte, daß eben bei seiner Befolgung die Natur am zweckmäßigsten vorgehe, stellte sich Fermat die umgekehrte und jedenfalls schwierigere Aufgabe, aus dem Prinzipe des kleinsten Aufwandes das Brechungsgesetz zu deduzieren. Zugleich erkannte aber auch Fermat, daß man bei dem Probleme der Lichtbrechung nicht von dem Grundsatze ausgehen dürfe, daß der Strahl zwischen zwei Punkten den kürzesten Weg zurücklege (denn dieser Weg wäre ja stets eine ungeknickte Gerade), daß man vielmehr behaupten müsse, daß der Lichtstrahl von dem einen Punkte zu dem anderen in der kürzesten Zeit gelange. (Bei dem Probleme der Lichtreflexion sind beide Annahmen gleichbedeutend, weil in einem einzigen Medium ja die Lichtgeschwindigkeit als konstant angenommen wird.)

Die Ableitung des Brechungsgesetzes aus dem allgemeinen Prinzipe gelang nun Fermat durch die geschickte Verwertung einer wichtigen mathematischen Erkenntnis, die zuerst, wie es scheint, Kepler[1] gewonnen hatte. Diese Erkenntnis bezieht sich auf den Fall, daß eine Funktion y einer unabhängigen Veränderlichen x für einen bestimmten Wert dieser unabhängigen Veränderlichen, den wir x^* nennen wollen, ein Maximum oder Minimum erreicht. Ist dies der Fall, so werden (wie einem ohne weiteres die graphische Darstellung zeigt) in der Umgebung von x^* die zugehörigen Werte von y untereinander kaum verschieden sein; es entspricht dies der geometrischen Tatsache, daß an solchen Stellen, an denen y ein Maximum oder Minimum wird, die Tangente an die Kurve, die durch die Gleichung $y=f(x)$ dargestellt ist, der Abszissenachse parallel wird. Es wird also (so drückt man sich exakter aus), wenn die Differenz zwischen x^* und x unendlich klein wird, die Differenz zwischen $y^*=f(x^*)$ und $y=f(x)$ unendlich klein von der zweiten Ordnung.

Um also die Werte von x zu ermitteln, für die $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird, verfährt man, wie Fermat bereits deutlich erkannte, so, daß man, indem man mit h eine beliebige unbestimmte Größe bezeichnet, zunächst die Differenz bildet $f(x+h)-f(x)$ und diese Differenz sodann durch h dividiert; in dem Quotienten, den man derart erhält, hat man dann der unbestimmten Größe h den Wert Null zu geben und den so erhaltenen Ausdruck schließlich selbst gleich Null zu setzen und nach x aufzulösen. Denn es muß ja nach dem früher Gesagten für solche Werte von x, für die $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird,

[1] Kepler, Stereometria doliorum (Opera, ed. Frisch, vol. IV), p. 612: circum maximum vero utrimque circumstantes decrementa habent initio insensibilia.

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \tag{2}$$

sein. (Wir erkennen natürlich, daß der auf der linken Seite der Gleichung stehende Ausdruck nichts anderes ist als der Differentialquotient der Funktion $f(x)$.)[1]

Das zuletzt angegebene Verfahren, das Fermat bereits zur Lösung mannigfacher geometrischer Probleme gebrauchte, benutzte er nun auch, um aus dem Prinzipe der kürzesten Zeit das Brechungsgesetz zu deduzieren.[2] Fermat betrachtet (Fig. 45) einen Punkt A in einem Medium, in dem sich das Licht mit der Geschwindigkeit v_1 fortpflanze und einen Punkt B in einem zweiten Medium, in dem das Licht die Fort-

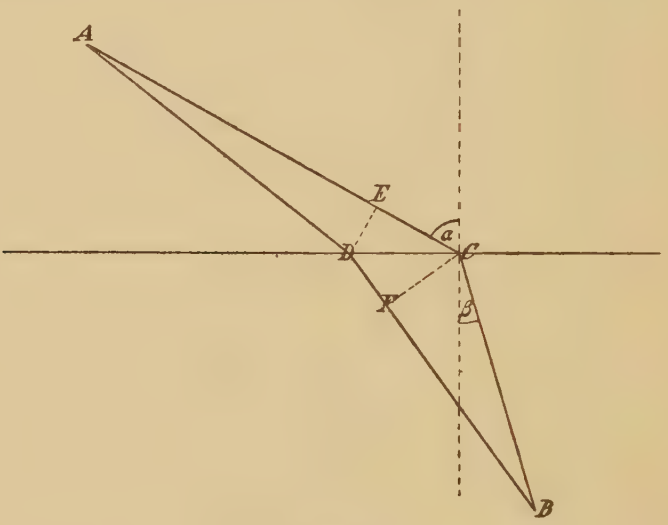

Fig. 45.

pflanzungsgeschwindigkeit v_2 habe, und er fragt sich nun, auf welche Weise an der Trennungsfläche der beiden Medien die Brechung erfolgen müsse, damit das Licht den Weg von A nach B in der kürzesten Zeit zurücklege.

Wenn der Weg, der in der kürzesten Zeit zurückgelegt wird, die Trennungsfläche in dem Punkte C durchsetzt, so muß jedenfalls, wenn dem Punkte C in der Trennungsfläche der Punkt C' benachbart ist, der Weg über C' dieselbe Zeit beanspruchen wie der Weg über C; genauer gesagt, wenn die Entfernung $C'C$ unendlich klein von der ersten Ord-

[1] Ob für den betreffenden Wert von x die Funktion $f(x)$ ein Maximum oder aber ein Minimum erreicht, hängt bekanntlich davon ab, ob der zweite Differentialquotient negativ oder positiv ist.

[2] Oeuvres de Fermat (Paris 1891). T. 1, p. 170—179; die Vereinfachungen des Fermatschen Gedankenganges nach Machs Mechanik.

nung ist, so muß der Zeitunterschied der beiden Wege über C und C' unendlich klein von der zweiten Ordnung sein.

Man braucht also nach dem Fermatschen Verfahren, indem man zunächst einen Punkt D in beliebiger Entfernung von C in der Trennungsfläche (und zugleich in der Einfallsebene) bestimmt, nur ermitteln, um wieviel der Weg über D länger dauert als der Weg über C; den so erhaltenen Ausdruck für den Zeitunterschied hat man dann durch die Länge von CD zu dividieren; in dem Quotienten muß man dann, wofern in ihm überhaupt noch die Länge CD vorkommt, diese Null werden lassen; und schließlich hat man den so erhaltenen Ausdruck selbst gleich Null zu setzen.

Man erkennt nun leicht, daß, wenn man von dem Punkte D ein Lot DE auf die Strecke AC und von dem Punkte C ein Lot CF auf die Strecke DB fällt, daß dann der Zeitverlust, den der Lichtstrahl erleidet, wenn er sich statt über C über D bewegt, gleich ist

$$\Delta t = -\frac{\overline{EC}}{v_1} + \frac{\overline{DF}}{v_2}.$$

Dies ist aber, wenn wir den Punkt D unmittelbar an den Punkt C heranrücken lassen, gleich

$$\Delta t = \overline{CD}\left(-\frac{\sin\alpha}{v_1} + \frac{\sin\beta}{v_2}\right). \tag{3}$$

Da also nach dem früher Gesagten

$$\lim_{\overline{CD}=0} \frac{\Delta t}{\overline{CD}} = 0 \tag{4}$$

werden muß, so ergibt sich aus der Gleichung (3) ohne weiteres das Brechungsgesetz in der Form

$$\sin\alpha : \sin\beta = v_1 : v_2. \tag{5}$$

Eine neue Periode in der Geschichte des Prinzipes des kleinsten Aufwandes begann mit einer Abhandlung, die im Jahre 1740 erschien und die Maupertuis zum Verfasser hatte.[1] In dieser Abhandlung, der in den nächsten Jahren noch zwei weitere folgten[2], suchte Maupertuis ein oberstes Naturgesetz in der Fassung zu formulieren, daß bei allen physikalischen Vorgängen die „Aktion", die er als das Produkt aus Masse, Weg und Geschwindigkeit definierte, ein Minimum darstellen müsse.

In dieser Fassung war das Prinzip freilich durchaus unexakt, weil es, da genauere Festsetzungen fehlen, eben nicht recht klar ist, was man in jedem besonderen Falle unter dem Wege und was unter der Ge-

[1] Loi du mouvement et du repos; Mém. de l'acad. des sciences de Paris, 1740.

[2] Accord de differentes loix de la nature; Mém. de l'acad. des sciences de Paris, 1744. Recherche mathématique des loix du mouvement et du repos; Mém. de l'acad. des sciences de Berlin 1747.

schwindigkeit zu verstehen habe[1]; aber andererseits wurde doch wieder durch diese oberflächliche und viel zu allgemeine Fassung das „principe de la moindre quantité d'action" so dehnbar, daß es Maupertuis nicht schwer fiel, in jedem besonderen Falle die „Aktion" so zu messen, daß zum Schlusse doch immer das gewünschte Resultat herauskam. So konnte Maupertuis den Anschein erwecken, als ob in der Tat alle Gesetze, sowohl der Dynamik als auch der Statik, nur Spezialfälle seines universellen Prinzipes darstellten, in dem er einen zwingenden Beweis für die Existenz Gottes erblickte.[2]

So willkürlich und unwissenschaftlich auch die Betrachtungen von Maupertuis waren, jedenfalls gebührt ihm doch das Verdienst, daß er durch das von ihm entdeckte Prinzip den Physikern sehr wertvolle Anregungen gab, die auf besonders fruchtbaren Boden bei Euler fielen. Euler setzte nämlich in einer Abhandlung über die Wurfbewegung, die er im Jahre 1744 als Anhang zu einem größeren Werke über isoperimetrische Probleme veröffentlichte[3], an die Stelle des vagen Maupertuisschen Ausdruckes $m \cdot v \cdot s$, indem er zugleich die konstante Masse heraushob, die exakt definierte Größe $\int_A^B v \cdot ds$, nämlich das Integral aus dem Wegelemente, multipliziert mit der Geschwindigkeit und berechnet für die Bewegung zwischen zwei Punkten der Bahn A und B. Euler konnte infolgedessen das Prinzip der kleinsten Aktion in der viel genaueren Fassung aussprechen, daß das Integral $\int_A^B v \cdot ds$ bei der tatsächlichen Bewegung kleiner ausfalle als bei einer Bewegung in einer beliebigen anderen Kurve, die ebenfalls die Punkte A und B verbindet.

Der Eulersche Satz gilt — wie nur nebenbei erwähnt sei — auch dann, wenn die Bewegung bestimmten Bedingungen unterliegt; es muß also auch, falls die Bewegung in einer vorgeschriebenen Fläche zwischen zwei Punkten erfolgt, bei der tatsächlichen Bewegung das Integral $\int v \cdot ds$ kleiner ausfallen als bei jeder anderen Bewegung, die zwischen diesen Punkten, aber doch in derselben Fläche verläuft. Betrachten wir daher einen Massenpunkt, der keinen äußeren Kräften unterliegt,

---

[1] Zur Kritik des Maupertuisschen Prinzipes vgl. man namentlich E. Mach, Die Mechanik, 3. Kap., 8.

[2] Vgl. Maupertuis, Essai de cosmologie (Oeuvres, Dresden 1752), Avantpropos. Über die philosophische Bedeutung — oder vielmehr Bedeutungslosigkeit — des Prinzipes der kleinsten Aktion vgl. man namentlich Ernst Mach, Mechanik, 4. Kap., 2 und J. Petzoldt, „Maxima, Minima und Ökonomie" (Altenburg 1891).

[3] Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici (Lausanne und Genf, 1744); Additamentum II: De motu proiectorum in medio resistente, per methodum maximorum ac minimorum determinando.

dessen Geschwindigkeit sich daher in ihrem absoluten Betrag nicht ändern kann, so muß für ihn wegen der Konstanz von v das Integral $\int ds$ ein Minimum (oder, was allerdings auch möglich ist, ein Maximum) sein; ein keinen Kräften unterliegender Massenpunkt muß sich also auf einer gegebenen Fläche stets in einer geodätischen Kurve bewegen. Auf die Bewegung in einer vollkommen vorgeschriebenen Bahn (wie wir sie in Vorlesung 15 betrachtet haben) ist hingegen der Eulersche Satz nicht anwendbar, weil die Form der Bahn bei derartigen Problemen überhaupt nicht variiert werden kann, ohne daß die vorgeschriebenen Bedingungen verletzt würden.

Das Prinzip, demzufolge die „Aktion“[1] oder der Ausdruck $m\int v\cdot ds$ bei der tatsächlichen Bewegung ein Minimum darstellen muß, hat Euler eigentlich nicht bewiesen; er hat es nur dadurch verifiziert, daß er aus ihm bei mehreren mechanischen Problemen richtig die Form der Bahn ableitete, also z. B. bei der Wurfbewegung richtig die parabolische Gestalt der Wurfbahn deduzierte. Die diesbezüglichen Untersuchungen Eulers sind aber auch deshalb sehr bedeutungsvoll, weil in ihnen zum ersten Male der — schärfer allerdings erst von Lagrange ausgebildete — Gedanke zum Ausdruck kam, daß man die Bedingungen, unter denen $\int v\cdot ds$ ein Minimum wird, derart ermitteln kann, daß man nach den Regeln der Variationsrechnung, die denen der Differentialrechnung analog sind, die Variation des Integrals bildet und diese dann gleich Null setzt. Das Eulersche Prinzip findet also seinen analytischen Ausdruck in der Formel

$$\delta\int v\cdot ds = 0. \tag{6}$$

Für diese Formel hat Euler, wie gesagt, einen eigentlichen Beweis noch nicht gegeben; einen solchen hat erst Lagrange erbracht, der zugleich den Satz, der bei Euler nur auf die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes angewendet erschien, auf ein System von beliebig vielen Massenpunkten ausdehnte, die in beliebiger Weise untereinander verbunden seien und in beliebiger Weise aufeinander wirken mögen.[2] Überdies hat aber auch Lagrange das Prinzip der kleinsten Aktion insofern viel exakter gestaltet, als er genau die Voraussetzungen formulierte, an deren Erfüllung die Geltung des Prinzipes geknüpft ist.

---

[1] Wir wollen unter Vermeidung des in der Regel gebrauchten, aber sehr unglücklich gewählten Ausdruckes lieber anstatt von einer kleinsten Wirkung von einer kleinsten Aktion sprechen. Denn unser Prinzip ist ja aus der Auffassung hervorgegangen, daß die Natur mit den gegebenen Mitteln stets die größten Wirkungen hervorbringt; es kann aber leicht Verwirrung stiften, wenn man das eine Mal von größten, das andere Mal aber wiederum von kleinsten Wirkungen spricht.

[2] Mécanique analytique, part. II, sect. III, § 6.

Lagrange ging wie bei allen seinen Ableitungen, so auch bei der Deduktion des Prinzipes der kleinsten Aktion von seiner dynamischen Universalformel aus, die, wie wir ja schon sahen[1], die Gestalt hat[2]

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \delta z \right) \\ &\qquad = P \cdot \delta p + Q \cdot \delta q + R \cdot \delta r + \dots . \end{aligned} \right.$$

Lagrange setzt nun voraus — und diese Voraussetzung ist für die Geltung des Prinzipes der kleinsten Aktion wesentlich und unbedingt notwendig —, daß sowohl für die tatsächliche als auch für die variierte Bewegung der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft[3] gilt.

Die Bewegung soll so wie früher wieder nur für ein bestimmtes endliches Stück der Bahn variiert werden. Wir betrachten z. B. das System in zwei bestimmten, durch eine endliche Zeit voneinander getrennten Figurationen, die wir kurz mit I und II bezeichnen wollen und durch die das System bei der tatsächlichen Bewegung auch wirklich gelangt. Dann soll nur der Teil der Bewegung variiert werden, durch den das System aus der Lage I in die Lage II überführt wird. Der h-te Massenpunkt befinde sich in der Figuration I im Punkte A_h, in der Figuration II im Punkte B_h. Die variierte Bewegung wird dann für den h-ten Massenpunkt in einer Kurve erfolgen, die im Punkte A_h beginnt und im Punkte B_h endet und die man derart erhält, daß man jedem Punkte der tatsächlichen Bahn mit den Koordinaten x, y, z einen Punkt mit den Koordinaten $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ zuordnet. Für die Punkte A_h und B_h sollen aber, wie gesagt, die tatsächliche und die variierte Bahn zusammenfallen, so daß also in den Lagen des Systems, die wir mit I und II bezeichnet haben, die Variationen aller Koordinaten des Systems verschwinden sollen.

Da für die tatsächliche Bewegung nun nach unserer Voraussetzung der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt, so muß die mechanische Energie des Systems bei der tatsächlichen Bewegung stets denselben Wert H besitzen; sie muß diesen Wert also auch in dem Augenblicke haben, in dem das System in die Figuration I gelangt. Falls aber nun die Geschwindigkeiten — so wie es Lagrange annimmt — durch die Lage des Systems eindeutig bestimmt sind, dann muß, da die Figuration I und infolgedessen auch die Geschwindigkeitswerte in ihr der tatsächlichen und der variierten Bewegung gemeinsam sind, auch die variierte Bewegung mit der Energie H beginnen, und da auch für die variierte Bewegung nach unserer Voraussetzung der Satz von der Er-

[1] Vorles. 16, Gleichung (6).

[2] Die Indizes h ($h=1$ bis n) wollen wir der Einfachheit halber in den folgenden Formeln weglassen.

[3] Dies ist z. B. nicht der Fall, wenn die Bewegung in einem widerstehenden Mittel stattfindet.

haltung der lebendigen Kraft gilt, so muß auch für sie die mechanische Energie stets den gleichen Wert H besitzen.

Geht man also von einer Figuration der tatsächlichen Bewegung, die zeitlich zwischen den Figurationen I und II liegt, zu der zugeordneten Figuration der variierten Bewegung über, so findet man doch auch hier wieder denselben Wert der mechanischen Energie vor. Es ist also auf Grund der getroffenen Voraussetzungen stets

$$\delta H = 0. \tag{8}$$

Nun ist aber

$$H = \sum \frac{m v^2}{2} + V, \tag{9}$$

wenn wir mit V die potentielle Energie bezeichnen; andererseits ist, wie wir schon sahen[1]

$$-\delta V = P\cdot\delta p + Q\cdot\delta q + R\cdot\delta r + \ldots; \tag{10}$$

somit ist auf Grund der Gleichung (8)

$$P\cdot\delta p + Q\cdot\delta q + R\cdot\delta r + \ldots = \Sigma\, m\, v\cdot\delta v. \tag{11}$$

Auf Grund dieser Beziehung können wir die rechte Seite der Gleichung (7) umformen; die linke können wir aber wiederum auf Grund der Identität transformieren, die wir schon in der letzten Vorlesung kennen lernten[2]

$$\left\{\begin{array}{l} d^2x\cdot\delta x + d^2y\cdot\delta y + d^2z\cdot\delta z \\ \quad = d\,(dx\cdot\delta x + dy\cdot\delta y + dz\cdot\delta z) - \frac{1}{2}\,\delta\,(dx^2+dy^2+dz^2). \end{array}\right. \tag{12}$$

Nun ist aber

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 \tag{13}$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}\,\delta\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) = ds\cdot\delta\, ds. \tag{14}$$

Es ist daher

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\delta z \\ \quad = \frac{d\,(dx\cdot\delta x + dy\cdot\delta y + dz\cdot\delta z)}{dt^2} - \frac{v\cdot\delta ds}{dt}. \end{array}\right. \tag{15}$$

(Bei der Umformung des letzten Gliedes wurde die einfache Relation benutzt $v = \frac{ds}{dt}$).

Setzen wir nun die Werte aus den Gleichungen (15) und (11) in die Gleichung (7) ein, so nimmt diese die Gestalt an

$$\sum m\left[\frac{d\,(dx\cdot\delta x + dy\cdot\delta y + dz\cdot\delta z)}{dt^2} - \frac{v\cdot\delta ds}{dt} - v\cdot\delta v\right] = 0. \tag{16}$$

[1] Vorles. 18, Gleichung (18).
[2] Vorles. 18, Gleichung (5).

Wir multiplizieren nun mit Lagrange die ganze Gleichung mit dt und beachten dabei, daß

$$v \cdot \delta ds + ds \cdot \delta v = \delta (v \cdot ds) \tag{17}$$

ist. Die Gleichung (16) nimmt dann die Gestalt an

$$\sum m \left[\frac{d(dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y + dz \cdot \delta z)}{dt} - \delta (v \cdot ds) \right] = 0. \tag{18}$$

Diese Gleichung integrieren wir nun über die ganze Bewegung von der Figuration I bis zur Figuration II. Wir erhalten dann, da man nach den Grundsätzen der Variationsrechnung das Variationszeichen vor das Integral- und vor das Summenzeichen setzen kann,

$$\delta \sum m \int v \cdot ds = \left| \sum m \frac{dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y + dz \cdot \delta z}{dt} \right|_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}. \tag{19}$$

Da aber für die Figurationen I und II, wie wir schon sahen, die Variationen aller Koordinaten verschwinden sollen, so müssen beide Ausdrücke, deren Differenz die rechte Seite der Gleichung (19) bildet, gleich Null sein, und somit nimmt auf Grund der getroffenen Voraussetzungen die Gleichung (19) die einfache Gestalt an

$$\delta \sum m \int v \cdot ds = 0. \tag{20}$$

Das in dieser Gleichung enthaltene Theorem, in dem man ohne weiteres eine Verallgemeinerung des Eulerschen Prinzipes erkennt, spricht Lagrange folgendermaßen aus: „Bei der Bewegung irgend eines Systems von Körpern, die durch gegenseitige Anziehungskräfte oder durch Kräfte angegriffen werden, die nach festen Zentren gerichtet und irgendwelchen Funktionen der Entfernung proportional sind“ — d. h. mit anderen Worten, bei der Bewegung eines Systems, für das das Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt — „sind die von den verschiedenen Körpern beschriebenen Kurven und die Geschwindigkeiten notwendigerweise so beschaffen, daß die Summe der Produkte der einzelnen Massen in die zugehörigen Integrale der mit dem Kurvenelemente multiplizierten Geschwindigkeit ein Maximum oder Minimum ist, vorausgesetzt, daß man die ersten und die letzten Punkte jeder Kurve als in ihrer Lage von vorneherein vorgeschrieben ansieht, so daß, wie auch die Kurven variieren mögen, die Variationen der diesen Punkten entsprechenden Koordinaten gleich Null sind“.[1]

Die Gleichung (20) enthält aber nun, wie Lagrange hervorhebt, nicht nur eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft der Bewegung eines Körpersystems; die Gleichung kann auch dazu dienen, die Bewegung selbst zu bestimmen. Man braucht, um sich davon zu überzeugen, nur (worauf hier nicht näher eingegangen werden soll) den Gedankengang, der uns von der Gleichung (7) zu der Gleichung (20) führte, um-

[1] Übersetzung von H. Servus (Berlin 1887).

zukehren, um wieder umgekehrt aus dem Prinzipe der kleinsten Aktion die dynamische Universalformel zu erhalten, aus der man wieder durch die bekannte Zerfällung die speziellen Bewegungsgleichungen des Systems gewinnt.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß man dem Satze der kleinsten Aktion, wie schon Euler erkannte, auch eine andere Fassung[1] geben kann, da ja

$$v \cdot ds = v^2 \cdot dt$$

ist. Es muß also für die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes

$$\delta \int v^2 \cdot dt = 0 \tag{21}$$

sein.

Die Gleichung (20) nimmt dann, wenn wir mit T die gesamte lebendige Kraft des Systems bezeichnen, die einfache Gestalt an

$$\delta \int 2T \cdot dt = 0, \tag{22}$$

so daß also die „Aktion" gleich ist der während der Zeit aufgehäuften doppelten lebendigen Kraft. Es muß also auch der Ausdruck

$$\frac{\int T \cdot dt}{\int dt}$$

ein Extremum sein; d. h. die tatsächliche Bewegung muß so vor sich gehen, daß für sie der Mittelwert der kinetischen Energie nach der Zeit ein Minimum (oder in Ausnahmefällen ein Maximum) wird.

[1] Daß Euler selbst die andere Fassung vorzog, hängt, wie er selbst andeutet, vielleicht damit zusammen, daß er in dem Streite um das richtige Maß der „Kraft" (mv oder mv^2?) beiden Parteien entgegenkommen wollte.

Zwanzigste Vorlesung.

Das Hamiltonsche Prinzip und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

In der letzten Vorlesung haben wir uns mit dem Satze der kleinsten Aktion befaßt, der, wie wir sahen, aus dem antiken Prinzipe des kleinsten Aufwandes in der Natur hervorgegangen ist, der seine Neubegründung durch Maupertuis, seine exakte Ausgestaltung aber erst durch Euler und vor allem durch Lagrange erfuhr. Die wesentliche Idee, die dem Satze der kleinsten Aktion zugrunde liegt, besteht, wie wir sahen, darin, daß man ein Stück der tatsächlichen Bewegung eines Systems von einer ersten bis zu einer zweiten Konfiguration vergleicht mit einer fingierten, von der tatsächlichen abweichenden Bewegung, die ebenfalls von der ersten zu der zweiten Konfiguration führt und die während ihres ganzen Verlaufes denselben konstanten Wert der mechanischen Energie besitzen soll wie die tatsächliche Bewegung. Wenn man dann unter der Aktion die aufgehäufte doppelte lebendige Kraft oder das bestimmte Integral $\int 2T\,dt$ versteht — erstreckt über die ganze Bewegung von der ersten bis zu der zweiten Konfiguration —, so stellt diese Aktion nach dem Euler-Lagrangeschen Satze ein Extremum dar; mit anderen Worten, die Aktion ist für die tatsächliche Bewegung und für eine nur unendlich wenig von ihr abweichende variierte Bewegung nicht verschieden. Man spricht aus diesem Grunde auch häufig von dem Prinzipe der stationären Aktion, da eben die Aktion keineswegs immer für die tatsächliche Bewegung ein Minimum sein, jedenfalls aber stets ihre Variation verschwinden muß.

Diesem Prinzipe der stationären Aktion hat nun in einer sehr bedeutungsvollen Abhandlung, die 1834 erschien[1], der englische Mathematiker William Rowan Hamilton (der berühmte Erfinder des Quaternionenkalküls) ein neues Prinzip gegenübergestellt, das er als Prinzip der variierenden Aktion, als „law of varying action" bezeichnete. Während nämlich Euler und Lagrange die tatsächliche Bewegung nur mit einer solchen variierten Bewegung verglichen haben, die denselben

[1] On a general method in dynamics; Philosophical Transactions, vol. 124, 1834, p. 247—308.

konstanten Wert der mechanischen Energie besitzt wie die tatsächliche Bewegung, betrachtete Hamilton eine ganz willkürlich variierte Bewegung, bezüglich deren zunächst gar keine bestimmten Vorschriften bestehen sollen, und legte sich nun die Frage vor, wie groß die Änderung sei, die die auf eine bestimmte Zeit bezogene Aktion erfährt, wenn man von der tatsächlichen zu der variierten, aber nur unendlich wenig abweichenden Bewegung übergeht.

Hamilton geht hierzu einerseits von dem Satz der Erhaltung der Energie aus, demzufolge

$$H = T + V \tag{1}$$

ist (H die gesamte mechanische Energie, T die kinetische, V die potentielle), andererseits aber von der dynamischen Universalformel von Lagrange, derzufolge bei der Existenz eines Potentials, wie wir schon sahen[1], die Beziehung gilt

$$-\delta V = \sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right). \tag{2}$$

Transformiert man die rechte Seite dieser Gleichung mittels der Identität, die wir schon in früheren Vorlesungen kennen lernten[2], so finden wir

$$-\delta V = \sum m \frac{d(dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y + dz \cdot \delta z)}{dt^2} - \delta T. \tag{3}$$

Variieren wir andererseits die Gleichung (1), so finden wir

$$\delta T = \delta H - \delta V, \tag{4}$$

oder wenn wir für δV den Wert aus Gleichung (3) einsetzen, dann mit dt multiplizieren und sodann integrieren und hierbei die Grundregeln der Variationsrechnung benutzen,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt = \left| \sum m \frac{dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y + dz \cdot \delta z}{dt} \right|_{t_0}^{t_1} + \delta \int_{t_0}^{t_1} H \cdot dt; \tag{5}$$

durch diese Gleichung ist die Variation der Aktion bestimmt.[3]

Hamilton mußte aber nun erkennen, eine wie einfache Gestalt die letzte Gleichung erlangt, wenn man die bisher angenommene völlige Willkür in der Variation der Bewegung einschränkt und verlangt, daß die variierte Bewegung so beschaffen sein soll, daß zur Zeit $t = t_0$ und zur Zeit $t = t_1$ bei der tatsächlichen und bei der variierten Bewegung das System dieselbe Position habe; dann verschwinden für $t = t_0$ und für $t = t_1$ die Variationen der Koordinaten des Systems, und die Glei-

[1] Vorles. 19, Gleich. (7) und (10).
[2] Vorles. 18, Gleich. (5) und Vorles. 19, Gleich. (12).
[3] Hierbei ist, da H von der Zeit unabhängig ist, das letzte Glied der Gleichung einfach gleich $(t_1 - t_0)\, \delta H$.

chung (5) nimmt dann unter Berücksichtigung der Gleichung (1) die einfache Form an

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) \cdot dt = 0. \tag{6}$$

Die Differenz $(T - V)$ bezeichnet man mit einem von Helmholtz geschaffenen Ausdrucke häufig auch als das kinetische Potential. Man kann also das Hamiltonsche Prinzip auch in der Form aussprechen, daß unter allen denkbaren Bewegungen, die in einer gegebenen Zeit ein System aus einer gegebenen Anfangslage in eine gegebene Endlage überführen, diejenige Bewegung die wirkliche ist, für die der Mittelwert[1] des kinetischen Potentials einen Grenzwert darstellt.

Die Gleichung (6), in der der Hamiltonsche Satz seinen analytischen Ausdruck findet, liefert nun die Bewegungsgleichungen des Systems, wenn man die Größen T und V durch die Koordinaten und die Geschwindigkeiten ausdrückt, sodann aber die Variation des Integrals derart ausführt, daß man dabei die unabhängige Veränderliche t, also die Zeit unvariiert läßt. Damit dies statthaft sei, hat man sich eben der tatsächlichen Bewegung die variierte so zugeordnet zu denken, daß der materielle Punkt in demselben Augenblicke, in dem er sich bei der tatsächlichen Bewegung an der Stelle mit den Koordinaten x, y, z befindet, bei der variierten Bewegung im Punkte mit den Koordinaten $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ ist.

Der Unterschied in der äußeren Form der Prinzipe der stationären und der variierenden Aktion erklärt sich also daraus, daß bei beiden Prinzipen die Zuordnung der variierten Bewegung zu der tatsächlichen in verschiedener Weise erfolgt. Beiden Prinzipen ist nur eine Voraussetzung bezüglich der Variation der Bewegung gemeinsam: daß nämlich die Anfangs- und die Endlage des Systems für die variierte Bewegung die gleichen sein müssen wie für die tatsächliche.

Im übrigen erfolgt aber in beiden Fällen die Variation der Bewegung auf verschiedene Art; für die Euler-Lagrangesche Methode ist es, wie wir sahen, charakteristisch, daß sich der Wert der mechanischen Energie bei dem Übergange von der tatsächlichen zu der variierten Bewegung nicht ändern darf. Infolgedessen wird im allgemeinen das System bei der nach Eulerscher Art variierten Bewegung eine andere Zeit als bei der tatsächlichen Bewegung brauchen, um aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage zu gelangen.

Bei der Methode, die dem Hamiltonschen Satze zugrunde liegt, ist es hingegen gerade umgekehrt. Hier müssen die Zeiten, in denen das System von der Anfangslage zur Endlage übergeht, bei der variierten und bei der tatsächlichen Bewegung gleich groß sein, wie überhaupt bei beiden Bewegungen durch einander zugeordnete Positionen das System

[1] Vgl. den Schluß von Vorles. 19.

immer in demselben Augenblicke (genauer gesagt in der gleichen Zeit nach dem Verlassen der Anfangslage) hindurchgelangen muß. Dagegen wird im Verlaufe der nach Hamiltonscher Art variierten Bewegung der Wert der mechanischen Energie verschieden sein von dem Werte, der während der ganzen tatsächlichen Bewegung konstant bleibt (und er braucht natürlich auch keineswegs während der variierten Bewegung selbst konstant zu sein).

Wenn also auch die Form der beiden Aktionsprinzipe verschieden erscheint, so sind andererseits auch wieder die Methoden verschieden, nach denen man bei beiden Prinzipen die gleich Null zu setzende Variation des betreffenden Integrals zu bilden hat; und so erklärt es sich eben, daß die beiden Prinzipe trotz ihrer verschiedenen Form dennoch in ihrer Anwendung auf bestimmte Systeme zu denselben Bewegungsgleichungen führen müssen.

Im übrigen erkennen wir aber, daß uns die Aktionsprinzipe keine neuen Integrale der Bewegungsgleichungen liefern. Sie sind in dieser Hinsicht durchaus verschieden von den Sätzen des Schwerpunktes, der Flächen und der lebendigen Kraft und vielmehr der dynamischen Universalgleichung von Lagrange vergleichbar (mit der sie ja auch in ihrem wesentlichen Inhalte völlig übereinstimmen); denn auch die Wirkungsprinzipe beruhen (wenn man so sagen darf) auf der Lagrangeschen Erfindung der zusammenlegbaren Bewegungsgleichungen. Gleich der dynamischen Universalgleichung stellen auch die Wirkungsprinzipe nur symbolische Formeln dar, die an sich eigentlich gar nichts über die Bewegung des Systems aussagen, wohl aber, wenn man sie nach einer bestimmten Methode behandelt, in die speziellen Bewegungsgleichungen des Systems gleichsam auseinanderfallen.

Der Vorteil, den die Anwendung der Aktionsprinzipe mit sich bringt, besteht aber — ganz abgesehen von der einfacheren Schreibweise bei allgemeinen Betrachtungen — darin, daß sie unter Umständen die Bewegungsgleichungen in einer für die weitere mathematische Behandlung viel geeigneteren und bequemeren Form liefern. Besonders groß sind in dieser Hinsicht die Vorteile, die das Hamiltonsche Prinzip bietet.

Um uns hiervon — allerdings nur recht oberflächlich[1] — zu überzeugen, brauchen wir nur die Gleichung (5) zu betrachten. Wir erkennen aus ihr, daß wir, wenn wir die Endlage und die obere Zeitgrenze als veränderlich ansehen, die gesamte Aktion oder Wirkung, die wir W nennen wollen, immer als Funktion von $(3n+1)$ unabhängigen Veränderlichen auffassen können, nämlich der $3n$ Koordinaten, die die Endlage des Systems bestimmen, und der Zeit t.

[1] Denn der eigentliche Vorteil der Hamiltonschen Methode offenbart sich erst bei recht schwierigen dynamischen Problemen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

Die partielle Differentiation von W nach diesen unabhängigen Variablen ergibt zunächst die sehr wichtige Beziehung

$$\frac{\partial W}{\partial t} = H \tag{7}$$

— eine Gleichung, die man gewöhnlich als die erste Hamiltonsche partielle Differentialgleichung bezeichnet.[1] Diese Gleichung ist so zu verstehen, daß der Wert von W um $H \cdot \delta t$ zunimmt, wenn man die Anfangs- und die Endlage des Systems unverändert läßt, hingegen die Zeit, die das System braucht, um von der Anfangs- in die Endlage zu gelangen, um δt vermehrt.

Andererseits ergibt, wenn man eben die Anfangskoordinaten zur Zeit t_0 als konstant betrachtet und die Endkoordinaten, die wir jetzt ebenso wie die obere Zeitgrenze als veränderlich ansehen, schlechthin x_h, y_h, z_h nennt, die partielle Differentiation von W nach den Endkoordinaten die Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_h} &= m_h \dot{x}_h, \\ \frac{\partial W}{\partial y_h} &= m_h \dot{y}_h, \\ \frac{\partial W}{\partial z_h} &= m_h \dot{z}_h \end{aligned}\right. \tag{8}$$

($h = 1$ bis n; insgesamt also $3n$ derartige Gleichungen).

Das allgemeine Problem der Dynamik eines Systems erscheint also dadurch [nach Gleich. (7) und (8)] im Wesen auf die Aufsuchung und Differentiation einer einzigen Funktion zurückgeführt, nämlich der Größe W, die Hamilton die „characteristic function" nannte. Denn wenn es gelungen ist, W als Funktion der Endkoordinaten und der Zeit darzustellen (was freilich im allgemeinen eine sehr schwierige Aufgabe ist), so braucht man nur W nach den Endkoordinaten und nach der Zeit partiell zu differentiieren und besitzt sodann nach Elimination von H aus den so erhaltenen $(3n+1)$ Gleichungen in den $3n$ Gleichungen (8) die gesuchten ersten Integrale der Bewegungsgleichungen.[2]

Die Funktion W hat also die merkwürdige Eigenschaft, daß einerseits ihre Variation bei gegebener Endlage und gegebener Zeit die Be-

[1] Die zweite Hamiltonsche partielle Differentialgleichung, die aber, wie insbesondere Jacobi in seinen Vorlesungen über Dynamik zeigte (Gesammelte Werke, Supplementband, S. 3), ganz überflüssig ist und nur die Entdeckung unnötig kompliziert macht, ergibt sich, wenn man bei gegebener Anfangs- und Endlage und konstant gehaltener oberer Zeitgrenze die untere Zeitgrenze als veränderlich ansieht.

[2] Man kann übrigens nach Hamilton sich auch die Anfangskoordinaten veränderlich denken und dann W überdies noch als Funktion der Anfangskoordinaten ansehen. Dann ergibt die nach den Anfangskoordinaten durchgeführte partielle Differentiation der Größe W (deren Bestimmung in diesem Falle aber natürlich noch schwieriger ist) die Anfangsgeschwindigkeiten und somit $3n$ Integrationskonstanten der Bewegungsgleichungen des Systems.

wegungsgleichungen des Systems liefert; denn zu diesen wird man immer geführt, wenn man die Bedingungen aufsucht, unter denen die Variation des bestimmten Integrales W bei gegebener Anfangs- und Endlage und bei gegebener Zeit verschwindet. Andererseits ergibt aber auch wiederum, wenn man die obere Zeitgrenze und die Endlage als veränderlich ansieht, die partielle Differentiation der Größe W erste Integrale für die vorhin erwähnten Bewegungsgleichungen.

Nur nebenbei sei erwähnt, daß es in vielen Fällen, wie Hamilton erkannte, noch praktischer ist, statt des bestimmten Integrales $\int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt$ das andere bestimmte Integral $\int_{t_0}^{t_1} (T-V) \cdot dt$ zu betrachten, das Hamilton die „principal function" nannte und das heute gewöhnlich als die Hamiltonsche Funktion bezeichnet wird.

Mit dem Prinzipe der variierenden Aktion hängt nun auf das engste eine neue Gestalt der generalisierten Bewegungsgleichungen zusammen, die zuerst Hamilton in einer zweiten, 1835 erschienenen Abhandlung[1] mitteilte und die man gewöhnlich als die Hamiltonsche oder auch als die kanonische Form der Bewegungsgleichungen bezeichnet.

Bei der Aufstellung dieser neuen Gleichungsform, die eben auch eine einfachere und bessere Anwendung der vorhin besprochenen Hamiltonschen Methoden gestattet, knüpfte nun Hamilton im wesentlichen wohl an einen sehr bedeutungsvollen Aufsatz an, den Poisson im Jahre 1809 im Journal der Pariser polytechnischen Hochschule[2] veröffentlicht hatte.

Poisson führte in diesem Aufsatze zunächst eine neue Schreibweise der Lagrangeschen generalisierten Bewegungsgleichungen ein, die für die weitere Entwicklung der höheren Dynamik sehr wichtig wurde. Poisson gebrauchte nämlich eigene Buchstaben für die partiellen Differentialquotienten der lebendigen Kraft nach den generalisierten Geschwindigkeiten — wie wir einfach die Differentialquotienten der generalisierten Koordinaten p_i nach der Zeit nennen wollen.

Definiert man also eine Größe q_i durch die Gleichung

$$q_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} \tag{9}$$

($i = 1$ bis s, wenn s die Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist), so nehmen die Bewegungsgleichungen von Lagrange[3]

[1] Second essay on a general method in dynamics; Philosophical Transactions, vol. 125, 1835, p. 95—144; namentlich § 1—4.

[2] Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique; Journal de l'école polytechnique, cahier XV, p. 266—353.

[3] Vorles. 18, Gleich. (23).

(10) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i}\right) = \frac{\partial (T - V)}{\partial p_i}$$

die Form an

(11) $$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial (T - V)}{\partial p_i}.$$

Bezeichnet man nun überdies die Differenz der lebendigen Kraft und des Potentials (also das „kinetische Potential") mit dem Buchstaben R, so erkennt man, da ja das Potential nur von den Koordinaten, nicht aber von den Geschwindigkeiten abhängen soll, daß

(12) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{p}_i}$$

ist.

Durch Zusammenfassung der Gleichungen (9) und (11) gewinnt also Poisson[1] die beiden Formeln

(13) $$\begin{cases} q_i = \dfrac{\partial R}{\partial \dot{p}_i}, \\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial R}{\partial p_i} \end{cases}$$

— zwei Formeln, die insofern eine gewisse Reziprozität erkennen lassen, als dieselbe Beziehung wie zwischen q_i und $\dot{p}_i$ auch zwischen $\dot{q}_i$ und p_i besteht.

Mit der Aufstellung dieser Gleichungen (13) ist aber nun keineswegs bloß einem ästhetischen Bedürfnisse Rechnung getragen, indem vielleicht die Bewegungsgleichungen in dieser neuen Gestalt ein gefälligeres und symmetrischeres Aussehen besitzen. Durch die Einführung der Größen q_i erfahren auch die Betrachtungen, die sich an die generalisierten Bewegungsgleichungen knüpfen, eine wesentliche Vereinfachung.

Um uns hiervon zu überzeugen, betrachten wir zunächst die lebendige Kraft des Systems, für die ja die Gleichung gilt

(14) $$2T = \sum_{h=1}^{h=n} m_h (\dot{x}_h^2 + \dot{y}_h^2 + \dot{z}_h^2).$$

Hieraus folgt ohne weiteres

(15) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_h} = m_h \cdot \dot{x}_h$$

und somit auch

(16) $$2T = \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_h} \cdot \dot{x}_h + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_h} \cdot \dot{y}_h + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_h} \cdot \dot{z}_h\right).$$

Wir ersehen also aus der Gleichung (15), daß die partielle Ableitung der lebendigen Kraft nach einer Geschwindigkeitskomponente immer eine Bewegungsgröße oder, wie man auch sagt, einen Impuls darstellt und

[1] Bei Poisson erscheint allerdings die Bedeutung der Buchstaben p und q vertauscht; wir haben uns jedoch hier der gebräuchlichen Schreibweise angeschlossen.

daß somit die partiellen Ableitungen der lebendigen Kraft nach den Geschwindigkeitskomponenten immer lineare Funktionen der betreffenden Geschwindigkeitskomponente sind.

Wenn nun die $3n$ orthogonalen Koordinaten des Systems bestimmte Funktionen der s generalisierten Koordinaten sind, so muß jedenfalls die Gleichung[1] gelten

$$\dot{x}_h = \frac{\partial x_h}{\partial p_1} \cdot \dot{p}_1 + \frac{\partial x_h}{\partial p_2} \cdot \dot{p}_2 + \frac{\partial x_h}{\partial p_3} \cdot \dot{p}_3 + \cdots + \frac{\partial x_h}{\partial p_s} \cdot \dot{p}_s, \tag{17}$$

wobei die auftretenden partiellen Differentialquotienten nur bestimmte Funktionen der generalisierten Koordinaten, nicht aber der generalisierten Geschwindigkeiten sein werden.

Indem wir diese Gleichung quadrieren, finden wir

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_h^2 = {} & \left(\frac{\partial x_h}{\partial p_1}\right)^2 \cdot \dot{p}_1^2 + \left(\frac{\partial x_h}{\partial p_2}\right)^2 \cdot \dot{p}_2^2 + \left(\frac{\partial x_h}{\partial p_3}\right)^2 \cdot \dot{p}_3^2 + \cdots \\ & + 2\frac{\partial x_h}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial p_2} \cdot \dot{p}_1 \dot{p}_2 + 2\frac{\partial x_h}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial p_3} \cdot \dot{p}_1 \dot{p}_3 + \cdots \\ & + 2\frac{\partial x_h}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial p_3} \cdot \dot{p}_2 \dot{p}_3 + \cdots . \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Bilden wir analoge Ausdrücke für $\dot{y}_h^2$ und $\dot{z}_h^2$ und setzen wir diese Werte in die Gleichung (14) ein, so erkennen wir, daß wir T in der Form darstellen können

$$2T = \sum_{i=1}^{i=s} c_i \cdot \dot{p}_i^2 + \sum_{i=1}^{i=s} \sum_{k=1}^{k=s}{}' c_{ik} \cdot \dot{p}_i \dot{p}_k, \tag{19}$$

wobei die Koeffizienten c_i und $c_{ik}\,(= c_{ki})$, da in ihnen (außer den Massen) nur die partiellen Ableitungen der orthogonalen nach den generalisierten Koordinaten vorkommen, auch nur Funktionen der generalisierten Koordinaten, nicht aber der generalisierten Geschwindigkeiten sein werden.

Es ist also, da in der Doppelsumme jeder Summand zweimal vorkommt,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} = c_i \cdot \dot{p}_i + \sum_{k=1}^{k=s}{}' c_{ik} \cdot \dot{p}_k \tag{20}$$

und somit

$$2T = \sum_{i=1}^{i=s} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} \cdot \dot{p}_i. \tag{21}$$

Unter Benutzung der durch die Gleichung (9) definierten Abkürzung können wir diese Gleichung auch in der Form schreiben

$$2T = \sum_{i=1}^{i=s} q_i \cdot \dot{p}_i, \tag{22}$$

wobei wir auf Grund der Gleichung (15) die q_i als die generalisierten Impulse des Systems bezeichnen wollen. Aus der Gleichung (20) er-

[1] Vgl. Vorles. 18, Gleich. (6).

gibt sich also, daß die generalisierten Impulse lineare Funktionen der generalisierten Geschwindigkeiten und überdies irgendwelche, aber bekannte Funktionen der generalisierten Koordinaten sind.

Wenn dies aber nun der Fall ist, dann kann man, wie Poisson zeigte, auch umgekehrt wieder die $\dot{p}_i$ als Funktionen der p_i und der q_i ansehen. Man braucht hierzu nur die Gleichungen, die die q_i als Funktionen der p_i und der $\dot{p}_i$ darstellen, nach den $\dot{p}_i$ aufzulösen und muß dabei natürlich auch wiederum finden, daß die generalisierten Geschwindigkeiten lineare Funktionen der generalisierten Impulse und im übrigen irgendwelche, aber bekannte Funktionen der generalisierten Koordinaten sind.

Man kann also das System, dessen Bewegungsgleichungen von den $2s$ Größen p_i und $\dot{p}_i$ abhängen, nach Poisson auch so behandeln, als ob es $2s$ unabhängige Variable hätte, nämlich die Größen p_i und q_i. Auf Grund dieser Annahme kann man nun auch die lebendige Kraft des Systems in doppelter Weise darstellen: einmal als Funktion der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten, das andere Mal als Funktion der generalisierten Koordinaten und Impulse. Im ersten Falle werden wir es mit einer Funktion $T(p_1 \dots p_s, \dot{p}_1 \dots \dot{p}_s)$ zu tun haben, im zweiten Falle mit einer Funktion $T(p_1 \dots p_s, q_1 \dots q_s)$.

Es ist aber nun, wie Poisson erkannte, klar, daß zwar $T(p, \dot{p})$ immer gleich sein muß $T(p, q)$, daß man hingegen für die partielle Ableitung der lebendigen Kraft nach einer generalisierten Koordinate verschiedene Werte erhalten muß, je nachdem ob man T auf die erste oder auf die zweite Art darstellt.[1] Wir wollen nun nach dem Vorbilde von Poisson[2] den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial T(p,\dot{p})}{\partial p_i}$ kurz mit $\frac{\partial T}{\partial p_i}$ bezeichnen, dagegen den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial T(p,q)}{\partial p_i}$ mit $\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right)$. Ebenso wollen wir für $\frac{\partial T(p,\dot{p})}{\partial \dot{p}_i}$ einfach $\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i}$, für $\frac{\partial T(p,q)}{\partial q_i}$ aber $\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$ schreiben.

Den Zusammenhang, der zwischen den eingeklammerten partiellen Differentialquotienten und den Größen besteht, die in unseren bisherigen Betrachtungen bereits vorkamen, kann man aber nun nach Hamilton, der die Überlegungen von Poisson erfolgreich weiterführte, am einfachsten durch folgende Überlegung ermitteln.

Man differentiiert die Gleichung (21) und findet dann

$$2dT = \sum_{i=1}^{i=s} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} \cdot d\dot{p}_i + \dot{p}_i \cdot d\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i}\right] \right\}. \tag{23}$$

[1] Denn es sind ja eben die $\dot{p}$ nicht allein Funktionen der q, sondern auch der p und ebenso sind die q sowohl Funktionen der $\dot{p}$ als auch der p.

[2] Bei Poisson erscheint die Bedeutung der eingeklammerten und der nicht eingeklammerten Differentialquotienten vertauscht; doch wollen wir uns auch hier der heute gebräuchlichen Schreibweise anschließen.

Andererseits muß, wenn T eine Funktion der p und der $\dot{p}$ ist, nach der Regel, die für die Differentiation einer Funktion von mehreren Veränderlichen gilt, die Gleichung bestehen

$$dT = \sum_{i=1}^{i=s} \left\{ \frac{\partial T}{\partial p_i} \cdot dp_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} \cdot d\dot{p}_i \right\}. \tag{24}$$

Subtrahiert man nun die Gleichung (24) von der Gleichung (23), so findet man

$$dT = \sum_{i=1}^{i=s} \left\{ \dot{p}_i \cdot d\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i}\right] - \frac{\partial T}{\partial p_i} \cdot dp_i \right\}. \tag{25}$$

Fassen wir nun andererseits T als Funktion der p und q auf, so muß wiederum nach der Regel, die für die Differentiation einer Funktion von mehreren Veränderlichen gilt, die Gleichung bestehen

$$dT = \sum_{i=1}^{i=s} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) dp_i + \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) dq_i \right\}. \tag{26}$$

Ein Vergleich der Formeln (26) und (25) liefert aber nun unter Berücksichtigung der Gleichung (9) sofort die beiden Relationen

$$\dot{p}_i = \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \tag{27}$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial p_i} = -\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right). \tag{28}$$

Wir können nun auf Grund dieser Gleichung (28) die generalisierten Bewegungsgleichungen von Lagrange auch in der Form schreiben

$$\frac{dq_i}{dt} = -\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial p_i}. \tag{29}$$

Es muß nun auffallen, daß auf der rechten Seite dieser Gleichung die partiellen Ableitungen der lebendigen Kraft und des Potentials dasselbe Vorzeichen haben, während sie in den ursprünglichen Gleichungen von Lagrange stets mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten. Dieser Umstand brachte Hamilton auf den glücklichen Gedanken, statt der Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie ihre Summe, statt des kinetischen Potentials also die mechanische Energie in die Bewegungsgleichungen einzuführen.

In der Tat braucht man hierzu nur die Energie als Funktion der $2s$ unabhängigen Variabeln $p_1 \dots p_s$, $q_1 \dots q_s$ anzusehen; man hat also die Energie gleich zu setzen

$$H = T(p_1 \dots p_s, q_1 \dots q_s) + V(p_1 \dots p_s). \tag{30}$$

Denn das Potential soll ja nur von der Lage des Systems abhängen und muß daher sowohl von den Geschwindigkeiten als auch von den Impulsen des Systems unabhängig sein.

Charakterisiert man also wieder die partiellen Differentialquotienten der derart aufgefaßten Größe H[1] durch eine Klammer, so erkennt man, daß

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial p_i} = -\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \tag{31}$$

und andererseits

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right). \tag{32}$$

Auf Grund dieser Relationen kann man aber nun ohne weiteres aus den Gleichungen (27) und (29) die wichtigen — bis auf das Vorzeichen — durchaus symmetrischen Formeln gewinnen

$$\dot{p}_i = \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right), \quad \dot{q}_i = -\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right). \tag{33}$$

Indem man in diesen Formeln (33) der Reihe nach für i die Werte von 1 bis s einsetzt, erhält man doppelt so viel Gleichungen, als das System Freiheitsgrade besitzt; man nennt diese Gleichungen, wie schon erwähnt, die Hamiltonschen oder auch die kanonischen Bewegungsgleichungen des Systems. Sie sind — worauf hier nicht näher eingegangen werden kann — sehr wertvoll für die höhere Dynamik und die Himmelsmechanik, sie stellen die eigentliche Grundlage der statistischen Mechanik dar, sie erweisen sich als besonders fruchtbar schließlich bei all den physikalischen Problemen, bei denen das Hamiltonsche Prinzip auch außerhalb der Mechanik Anwendung findet.

[1] Natürlich kann man auch H ebenso wie T durch die p und die $\dot{p}$ ausdrücken.

Namenverzeichnis.

d'Alembert, Jean le Rond (1717—1783); Mitglied der Pariser Akademie, Mathematiker, Physiker und Philosoph, mit Didérot Herausgeber der großen französischen Enzyklopädie. Traité de dynamique (Paris 1743); deutsch in Ostwalds Klassikern Nr. 106.
S. 103, 105, 162—165.

Archimedes von Syrakus (ca. 290—212 v. Chr.). Mathematische Schriften über „Kugel und Zylinder", über „Kreismessung", über „Quadratur der Parabel" u. a.; zwei mechanische über das „Gleichgewicht schwerer Ebenen" und über die „schwimmenden Körper". Ausgabe der Bibliotheca Teubneriana; deutsch von E. Nizze (Stralsund 1824) und Kliem (Berlin 1914).
S. 2—6, 24, 65, 103.

d'Arcy, Patrick Graf (1725—1779); französischer Feldmarschall und Mitglied der Pariser Akademie.
S. 120, 122, 123.

Aristarch von Samos (um 250 v. Chr.); hervorragender griechischer Astronom.
S. 86.

Aristoteles aus Stagira (384—322 v. Chr.). Physikalische Hauptwerke: 8 Bücher Physik (griechisch und deutsch von Prantl, Leipzig 1854), 4 Bücher über das Himmelsgebäude (griechisch und deutsch von Prantl, Leipzig 1857), 4 Bücher Meteorologie; wahrscheinlich unecht die „mechanischen Probleme".
S. 25, 45—47, 64, 85, 189.

Benedetti, Giovanni Battista (1530—1590); Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber (1585).
S. 47, 65.

Bernoulli, Daniel (1700—1782); Sohn von Johann, Prof. an der Universität Basel. Hydrodynamica (Straßburg 1738).
S. 103, 120—122, 135—136, 139.

Bernoulli, Jakob (1654—1705); Professor der Mathematik an der Universität Basel; vorwiegend Mathematiker (Infinitesimal- und Wahrscheinlichkeitsrechnung). Opera omnia, Genf 1744.
S. 160—161.

Bernoulli, Johann (1667—1748), jüngerer Bruder von Jakob; Prof. an den Universitäten Gröningen und Basel. Opera omnia, Lausanne 1742.
S. 28—30.

Borelli, Giovanni Alfonso (1608—1679); Prof. der Philosophie und Mathematik in Messina und Pisa, Mitglied der Accademia del cimento; auch Astronom und Begründer der physiologischen Mechanik. Theoria mediceorum planetarum (Florenz 1666).
S. 92.

Brahe Tycho (1546—1601); wirkte zuerst in Dänemark, dann als Astronom Rudolfs II. in Prag.
S. 87—88.

Cardanus, Hieronymus (1501—1576); Arzt, Philosoph, Mathematiker und Physiker (Gleichungen dritten Grades; cardanische Aufhängung); Prof. an verschiedenen italienischen Universitäten.
S. 28.

Carnot, Lazare (1753—1823); französischer Staatsmann und Techniker.
S. 148.

Cavalieri, Francesco Bonaventura (1598—1647); Mathematiker und Physiker (geometrische Optik), Professor in Bologna; Hauptwerk „Geometria indivisibilium" (1653).
S. 65.

Cavendish, Henry (1731—1810); berühmter Chemiker (Entdecker des Wasserstoffs), auch Mathematiker, Physiker und Astronom.
S. 100.

Clairault, Alexis Claude (1713—1765); Mitglied der Pariser Akademie (seit seinem 18. Lebensjahre); Théorie de la figure de la terre (Paris 1743), deutsch in Ostwalds Klassikern Nr. 189.
S. 103, 140—142.

Copernicus (Koppernikus), Nicolaus (1473—1543); Domherr zu Frauenburg (Ostpreußen); De revolutionibus orbium coelestium (Nürnberg 1543).
S. 86—87.

Coriolis, Gustave Gaspard (1792—1843); Prof. an der École polytechnique in Paris; wichtige Arbeiten über technische und theoretische Mechanik (Relativbewegung).
S. 134, 148.

Cusanus, Nicolaus (1401—1461), aus Kues an der Mosel; Bischof von Brixen, Begründer der Unendlichkeitsphilosophie; De docta ignorantia (Lehre von der Erdbewegung) und De staticis experimentis.
S. 86.

Descartes, René (Renatus Cartesius, 1596—1650); Begründer der neueren rationalistischen Philosophie, Erfinder der analytischen Geometrie; Discours de la méthode (1637) mit Abhandlung über Dioptrik, Meteore und Geometrie; Principia philosophiae (1644), deutsch von Kirchmann (Berlin 1870).
S. 20, 27, 56—58, 121, 127, 134.

Eudox von Knidos (ca. 400—350 v. Chr.); bedeutender antiker Astronom und Mathematiker, Schüler Platons.
S. 85.

Euler, Leonhard (1707—1783); geb. in Basel, Prof. in Petersburg, dann Direktor der Berliner Akademie, dann wieder in Petersburg; über 800 mathematische, physikalische und philosophische Abhandlungen. Mechanische Hauptwerke (beide deutsch von Wolfers, Greifswald 1848—1853): Mechanica sive motus scientia analytice exposita (Petersburg 1736) und Theoria motus corporum solidorum (Greifswald 1765).
S. 21, 29, 71—83, 96, 103, 116, 120—122, 137—140, 142, 152—156, 194—195, 199.

Fabri, Honoré (1606—1688); Jesuit, Verfasser mehrerer physikalischer und geometrischer Werke.
S. 127.

Fermat, Pierre (1601—1665); Mathematiker; wichtige Untersuchungen vor allem über die Theorie der Maxima und Minima, sowie über Zahlentheorie.
S. 65, 191, 192.

Galilei, Galileo (1564—1642); Professor der Mathematik an den Universitäten Pisa und Padua; große astronomische Entdeckungen (namentlich Jupitertrabanten). Hauptwerke: Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo (Florenz 1632), deutsch von E. Strauß (Leipzig 1892) und die „Discorsi" (Leiden 1638), deutsch in Ostwalds Klassikern, Nr. 11, 24, 25.
S. 15—17, 28, 47—56, 59—60, 64, 68, 126—127, 137, 142, 150, 151.

Gassendi, Pierre (1592—1655); Minorit; Astronom, Mathematiker und Physiker; Erneuerer der Atomistik.
S. 87.

Graßmann, Hermann (1809—1877); Gymnasialprofessor in Stettin, Begründer der Vektoranalysis; „Ausdehnungslehre" (1844).
S. 118.

Green, George (1793—1841); wichtige Arbeiten über Potentialtheorie.
S. 147.

Halley, Edmund (1656—1742); hervorragender englischer Astronom.
S. 92.

Hamilton, Sir William Rowan (1805—1865); Prof. der Astronomie in Dublin; Erfinder des Quaternionenkalküls; wichtige mechanische und optische Arbeiten.
S. 18, 200—210.

Helmholtz, Hermann von (1821—1894); seit 1871 Prof. der Physik an der Universität Berlin; wichtigste Forschungen über das Energieprinzip, über Hydrodynamik, Akustik, physiologische Optik und Elektrizitätstheorie.
S. 148, 202.

Heron, von Alexandria (Lebenszeit ungewiß); antiker Physiker und berühmter Erfinder, Ausgabe seiner Schriften mit deutscher Übersetzung in der Bibliotheca Teubneriana: Mechanik, Pneumatik, Automaten, Katoptrik u. a.
S. 6, 15, 24—25, 60, 189.

Hipparch, von Nicäa (2. Jahrh. v. Chr.); hervorragender griechischer Astronom.
S. 85.

Hooke, Robert (1635—1703); Mitglied und Sekretär der Royal Society in London; Forschungen über Optik, Elastizitätstheorie und physikalische Instrumente.
S. 92.

l'Hôpital (oder l'Hospital), Guillaume François Marquis de (1661—1704); Offizier und Ehrenmitglied der Pariser Akademie.
S. 161.

Huygens (oder Huyghens), Christiaan (1629—1695); lebte in Paris und Holland; wichtige mathematische, mechanische und optische Untersuchungen; Erfindung der Pendeluhr; Horologium oscillatorium (Paris 1673), deutsch in Ostwalds Klassikern, Nr. 192.
S. 65, 69—70, 105, 126—136, 152, 160.

Jordanus, Nemorarius; nicht näher bekannter hervorragender mathematisch-mechanischer Forscher des 13. Jahrhunderts; liber de ponderibus (herausgegeben von Apian 1533).
S. 7—9, 12, 19, 20, 27, 60.

Kepler, Johannes (1571—1630); wirkte in Graz, Prag (als Nachfolger Tychos) und Linz; Astronomia nova (1609) und Harmonice mundi (1619); Gesamtausgabe von Frisch (Frankfurt 1858—1871).
S. 88—90, 91, 92, 113, 191.

Lagrange, Joseph Louis (1736—1813); zunächst Professor in Turin, dann Direktor der Berliner Akademie, schließlich Professor an der École polytechnique in Paris; bahnbrechende Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik, der Funktionentheorie, der Variationsrechnung und der Störungstheorie; Mécanique analytique (zuerst Paris 1788; die Zitate beziehen sich stets auf die zweite Auflage), deutsch von H. Servus (Berlin 1887); Gesamtausgabe Paris 1867—1892.
S. 1, 29—30, 33—42, 106, 113, 116, 123, 143—145, 165—186, 195—198.

Laplace, Pierre Simon Graf (1749—1827); zahlreiche wertvolle Abhandlungen astronomischen, mathematischen und physikalischen Inhalts; Hauptwerk: Mécanique céleste (Paris 1799—1825).
S. 96—99, 125, 145, 146.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716); dritte Folge der Gesamtausgabe: Mathematische Schriften, 7 Bde., herausg. v. Gerhardt (Berlin und Halle 1849—1862).
S. 65, 67, 133—134, 148.

Lionardo (oder Leonardo) da Vinci (1452—1519); die wissenschaftlichen Manuskripte herausgegeben von Ravaisson-Mollien (Paris 1880—1892).
S. 7, 28, 46.

Mac Laurin, Colin (1698—1746); Prof. der Mathematik an der Universität Edinburgh; A complete system of fluxions (Edinburgh 1742).
S. 21, 74—75.

Maupertuis, Pierre Louis Moreau de (1698—1759); erst Offizier, dann Mitglied der Pariser Akademie und später Präsident der Berliner Akademie; Essai de cosmologie, 1750.
S. 29, 193, 194.

Mersenne, Marin (1588—1648); Arbeiten über Mathematik und Akustik, reger Briefwechsel mit allen Gelehrten seiner Zeit.
S. 127.

del Monte, s. Ubaldi.

Nemorarius, s. Jordanus.

Newton, Isaac (1643—1727); Hauptwerke Optice (1702) und Philosophiae naturalis principia mathematica (London 1687), deutsch von Wolfers (Berlin 1872); vgl. namentlich F. Rosenberger, Isaac Newton und seine physikalischen Prinzipien (Leipzig 1895).
S. 17, 58—63, 65—67, 84, 92—96, 99—101, 103—105, 113, 155.

Platon aus Athen (427—347 v. Chr.); Naturwissenschaftliches namentlich im Dialoge „Timaios".
S. 85, 91.

Poncelet, Jean Victor (1788—1867); Begründer der projektiven Geometrie; wichtige Werke über technische Mechanik.
S. 148.

Ptolemaeus, Claudius (um 100 n. Chr. in Alexandria); Astronom, Geograph und Physiker (Optik); Astronomisches Hauptwerk der „Almagest", griechisch-deutsch in der Bibliotheca Teubneriana.
S. 85.

Rankine, William John (1820—1872); Ingenieur in Glasgow.
S. 148.

Stevin, Simon (1548—1620); holländischer Techniker, Mathematiker (Erfinder der Dezimalbrüche) und Physiker (Hydrostatik); Opera, Leyden 1638.
S. 12—15, 31, 151.

Tycho, s. Brahe.

Ubaldi (oder Ubaldo), Guido Marchese del Monte (1545—1607); Mechanicorum liber (Pisauris 1577).
S. 9—11, 28.

Varignon, Pierre (1654—1722); Nouvelle mécanique (Paris 1687 und 1725).
S. 17, 28—29.

Sachverzeichnis.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Addition, geometrische 18—19.
Aktion, kleinste 189—200.
— stationäre 200.
— variierende 200.
Algebraische Methode 36.
Analytische Geometrie 20—22.
Ascensus potentialis 133.

Bahn, vorgeschriebene 151—157.
Bedingungsgleichungen 39.
Beharrungsgesetz 54—58.
Beschleunigung (Begriff) 49, 68.
— momentane 68—70.
Beschleunigungskomponenten 78.
Bewegungen, „natürliche" und erzwungene 45—46.
— freie und unfreie 149.
Bewegungsaxiome 56—62.
Bewegungsgleichungen, natürliche 73.
— in rechtwinkligen Koordinaten 78, 111.
— in Polarkoordinaten 83.
— generalisierte 178—188.
— kanonische 210.
Bewegungsgröße, Erhaltung 58, 61—62, 111.
— als Vektor 111, 120.
Bewegungsparallelogramm 15—17.
Brechungsgesetz 192, 193.

Descensus actualis 133.
Differentialrechnung 65—66.
Drehmoment um eine Koordinatenachse 117—118.
Dreikörperproblem 103.

Einfachheit der Naturgesetze 48.
Energie 148.
Epizykeln 85.
Ergänzender Vektor 118—119.

Fall der Körper 46—54.
Flächengeschwindigkeit 113—115.
Flächenprinzip 93, 113—125.
Flächenmomente 121—125.

Generalisierte Koordinaten 40—41.
— Kräfte 184—186.
— Bewegungsgleichungen 178—188.
— Geschwindigkeiten 205.
— Impulse 207.
Geodätische Kurve 195.
Geschwindigkeit, Begriff 48, 63—64.
— momentane 64—66.
Geschwindigkeitskomponenten 76—77.
Gleichförmige Bewegung 48, 63—64.
Gleichgewichtsgleichungen 35—44.
Gravitas secundum situm 8.
Gravitation 91—101.
Gravitationskonstante 100.

Hebelgesetz 2—11, 161.

Ideale Bewegungsvorgänge 54—56.
Integralprinzip 102—103.
Integralrechnung 67—68.
Integrationsmethoden der Bewegungsgleichungen 109—110, 123—124, 140.

Keplersche Gesetze 88—90, 113.
Kinetisches Potential 202.
Koordinatensytem, festes in der Mechanik 21, 74—75.
Kräfte, äußere und innere 108.
Kräfteparallelogramm 12—23.
Kräftezerlegung 19—20.
Kräftezusammensetzung 17—23.
Kreisbewegung 46, 84—87, 152, 154—155, 158.
Kreisbewegungsmoment 120—122.
Kürzester Weg 190.
Kürzeste Zeit 191.

Lebendige Kraft 134.
— Erhaltung 126—136.

Maschinen 1—2, 24.
Massenbegriff 61.
Massenmittelpunkt 103.
Materieller Punkt 57.

Maxima und Minima 191.
Moment, statisches 10—11, 116—119.
— der Bewegungsgröße 120—121.
— virtuelles 36, 172.
Momentenvektor 119.
Mondbewegung 99—100.
Multiplikatoren, Lagrangesche 169—173.

Pendel 51—52, 54.
— physisches 127—133, 159—161.
Planetenbewegungen 84—101.
Potentialbegriff 137—148.

Reaktionskraft 151, 155, 157.
Reaktionsprinzip 61, 108, 113, 124.
Reflexionsgesetz 190.
Resolutio motus 75.
Rolle 9.

Schiefe Ebene 12—14, 51—55, 59—60, 126, 151, 158.
Schmiegungsebene 71.
Schwerpunkt 2—5, 102—112, 127—131.
Schwingungsmittelpunkt 127, 131—133. 160—161.
Skalare 18.
Sphärentheorie 85.
Starre Systeme 174—175.
Statik (Definition) 1.
Stoßgesetze 134.
Superpositionsprinzip 16.

Teleologische Naturauffassung 189.

Umkehrbarkeit mechanischer Vorgänge 51—52, 54—56, 126—133.
Universalformel, statische 35—44.
— dynamische 165—169, 178, 196.

Variationsrechnung 195.
Vektoren 18.
Verlorene Kräfte 163.
Virtuelle Verrückungen 24, 30—33.

Wirkung, s. Aktion.
Wurfbewegung 16, 54—55, 194.

Zentrifugalkraft 69, 152.
Zusatzkräfte 151, 171—173.